Integrálható sokrészecske rendszerek vizsgálata hamiltoni szimmetria-redukciós módszerrel

Doktori/Ph.D. értekezés

Ayadi Viktor

Témavezető:

Dr. Fehér László Gyula
egyetemi tanár
Fizika doktori iskola

Szegedi Tudományegyetem
Elméleti Fizikai Tanszék

Szeged

2013

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

Az elmúlt évtizedek során az integrálható, egzaktul megoldható rendszerek vizsgálata a matematikai fizika egy jelentős ágává vált. Számos példát találhatunk integrálható rendszerekre a hidrodinamika, a nemlineáris optika, a részecskefizika és az általános relativitáselmélet területén. Fontosságuk egyik oka az, hogy gyakorta alkalmas kiinduló pontot nyújtanak bonyolultabb nemlineáris jelenségek vizsgálatához. Realisztikus modellek gyakran tárgyalhatók egzaktul megoldható problémák perturbációiként. Az integrálható rendszerek felhasználhatók numerikus módszerek pontosságának ellenőrzésére is.

Az integrálhatóságot egyszerűbb néhány példával illusztrálni, mint precízen definiálni. Első példaként egy jól ismert klasszikus térelméleti integrálható modellt, a Korteweg–de Vries (KdV) egyenletet [17, 48] említjük, mely az alábbi alakban írható:

$$\partial_t\phi - \partial_x^3\phi - 6\phi\partial_x\phi = 0. \tag{1.1}$$

A fenti egyenlet sekély csatornában haladó egydimenziósnak tekinthető vízhullámot ír le, melynek magassága $\phi = \phi(x,t)$. Ilyen hullámokat először Scott–Russell figyelt meg 1834-ben [17]. A megfigyelt, térben lokalizált hullámok állandó sebességgel haladtak, miközben magasságuk és alakjuk változatlan maradt. Az ilyen megoldásokat szolitonoknak nevezzük. Az (1.1) egyenlet

$$\phi(x,t) = 2\kappa^2\cosh^{-2}(\kappa x - 4\kappa^3 t - \kappa x_0) \tag{1.2}$$

1-szoliton megoldását Korteweg és de Vries írta fel, ahol κ és x_0 konstansok. A Korteweg–de Vries (KdV) egyenletben a $6\phi\partial_x\phi$ nemlineáris tag kompenzálja a $\partial_x^3\phi$ diszperzív tag hatását, így a hullámcsomag nem folyik szét. Egy másik nevezetes, szoliton megoldásokkal rendelkező integrálható modell a sine-Gordon egyenlet:

$$\partial_t^2\phi - \partial_x^2\phi + \sin^2\phi = 0, \tag{1.3}$$

amely felfogható a Klein–Gordon egyenlet [29] perturbációjaként is. A sine-Gordon egyenlet modellezhető rugalmas gumiszalaghoz rögzített fizikai ingák sorozatával. Az ingák szögelfordulását $\phi = \phi(x,t)$ adja meg. Az egyenlet 1-szoliton megoldása a következő alakban írható:

$$\phi(x,t) = 4\arctan\left(\frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + \delta\right). \tag{1.4}$$

A sokszoliton megoldások egy érdekessége, hogy a szolitonok képesek „áthaladni” egymáson, az áthaladás után a kölcsönható szolitonok fázisa megváltozhat, de az alakjuk változatlan marad.

A két legismertebb klasszikus fizikai integrálható rendszer az izotrop harmonikus oszcillátor és a Kepler probléma. A dolgozatban egy térdimenzióban mozgó integrálható sokrészecske rendszerek klasszikus integrálhatóságának néhány aspektusát tárgyaljuk. A következőkben az úgynevezett Calogero–Sutherland és Ruijsenaars–Schneider típusú integrálható modellek egyes változataival ismerkedünk meg.

A Calogero–Sutherland típusú modellek [10, 37, 51] a véges dimenziós dinamikai rendszerek azon csoportjába tartoznak, amelyek integrálhatóak mind klasszikus, mind kvantum szinten.

Ezek a modellek tetszőleges számú ($n \geq 2$) pontszerű részecskét írnak le, melyek egyenesen vagy körön mozognak és egymással párkölcsönhatásban állnak. A köztük fellépő kölcsönhatás többféle alakú függvény lehet. A legfontosabb esetekben ez a kölcsönhatás a részecskekoordináta különbségek racionális, hiperbolikus, trigonometrikus vagy elliptikus függvénye. Az n részecskés racionális modell integrálhatóságával Calogero először kvantummechanikai kontextusban foglalkozott [9], később Moser látta be a modell klasszikus integrálhatóságát [36]. A modell Hamilton-függvénye

$$H_{\mathrm{rat-Cal}} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} {p_i}^2 + g^2 \sum_{j\neq k} \frac{1}{(q^j - q^k)^2}, \tag{1.5}$$

ahol g tetszőleges valós csatolási állandó. A racionális Calogero modell trigonometrikus általánosítása Sutherland nevéhez fűződik [50]. A Sutherland modell trigonometrikus változatát a

$$H_{\mathrm{trig-Suth}} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} {p_i}^2 + g^2 \sum_{j\neq k} \frac{1}{\sin^2(q^j - q^k)} \tag{1.6}$$

Hamilton-függvény írja le, míg a hiperbolikus változatot a

$$H_{\mathrm{hyp-Suth}} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} {p_i}^2 + g^2 \sum_{j\neq k} \frac{1}{\sinh^2(q^j - q^k)}. \tag{1.7}$$

Hamilton-függvény szolgáltatja. A fenti modellek egyes változatai alkalmasak szoliton egyenletek megoldásainak vizsgálatára is. A „Calogero-részecskék” mozgásának megfeleltethető bizonyos KdV megoldások pólusainak és zéróhelyeinek időfejlődése [11].

A Ruijsenaars–Schneider modellek [10, 46] szintén n darab egy térdimenzióban mozgó kölcsönható részecskét írnak le. A részecskék közti általánosított párpotenciál a legfontosabb esetekben ugyancsak a részecskepozíciók racionális, trigonometrikus, hiperbolikus függvénye. Az említett kölcsönhatásokhoz tartozó modelleket az alábbi Hamilton-függvények írják le:

$$H_{\mathrm{rat-RS}} = c^2 \sum_{j=1}^{n} \cosh(\frac{p_j}{c}) \prod_{k\neq j} \left[1 + \frac{g^2}{c^2(q_j - q_k)^2}\right] \tag{1.8}$$

$$H_{\mathrm{trig-RS}} = c^2 \sum_{j=1}^{n} \cosh(\frac{p_j}{c}) \prod_{k\neq j} \left[1 + \frac{\sin^2(g/c)}{\sin^2(q_j - q_k)^2}\right] \tag{1.9}$$

$$H_{\mathrm{hyp-RS}} = c^2 \sum_{j=1}^{n} \cosh(\frac{p_j}{c}) \prod_{k\neq j} \left[1 + \frac{\sin^2(g/c)}{\sinh^2(q_j - q_k)^2}\right], \tag{1.10}$$

ahol g tetszőleges valós csatolási állandó és c pozitív valós paraméter. Az (1.8)-(1.10)-ben definiált Ruijsenaars–Schneider Hamilton-függvények nem-relativisztikus limeszeként visszakapjuk az (1.5)-(1.7) Caloger-Sutherland Hamilton-függvényeket (pl.: $\lim_{c\to\infty} H_{\mathrm{rat-RS}} - nc^2 = H_{\mathrm{rat-Cal}}$). Továbbá mindhárom modell rendelkezik egy eltolás és egy „boost” generátorral, amelyek a Hamilton-függvénnyel együtt a Poisson zárójelen keresztül az $1+1$ dimenziós Poincaré algebrát generálják. A Ruijsenaars–Schneider modell kapcsolatba hozható integrálható parciális differenciálegyenletek szoliton megoldásaival. Például az n részecskés hiperbolikus Ruijsenaars–Schneider modell alkalmas a sine-Gordon modell n-szoliton megoldásainak leírására [43, 46].

A dolgozat fő célja bemutatni a sokrészecske rendszerek leírásánál gyakran alkalmazható szimmetria-redukciós technikát és néhány alkalmazását. Az integrálható sokrészecske rendszerek aktuális kérdései közül a szuperintegrálhatósággal és a dualitási transzformációval foglalkozunk részletesebben egy-egy példán keresztül. Ezeket a kérdéseket az említett Sutherland és Ruijsenaars típusú rendszerek érdekes speciális eseteiben tanulmányozzuk. A vizsgált példákon keresztül illusztráljuk a csoportelmélet által szolgáltatott geometriai kép hasznosságát.

A 2. fejezetet bevezető jellegű résszel indítjuk, amelyben áttekintünk néhány fontosabb fogalmat a hamiltoni dinamikai rendszerekkel és a Liouville integrálhatósággal, illetve a szuperintegrálhatósággal kapcsolatban. Itt ismertetjük az integrálható rendszerek témakörében kulcsszerepet játszó Lax pár és r-mátrix fogalmát is. Ezután a 2.3 alfejezetben egy igen hasznos technikával, a Marsden–Weinstein szimmetria-redukciós eljárással és az eltolási trükkel ismerkedünk meg. Ezt a módszert akkor alkalmazhatjuk, ha egy hamiltoni dinamikai rendszer invariáns valamely Lie-csoport fázistéren értelmezett hatására nézve. Ekkor a hatással faktorizálva alacsonyabb dimenziós hamiltoni rendszer adódik. A szimplektikus redukciót tárgyaló rész lezárásaként konkrét példákon keresztül illusztráljuk a módszer hasznosságát. Vázlatosan bemutatjuk a racionális Calogero, a hiperbolikus Sutherland és a racionális Ruijsenaars modell hamiltoni redukciós levezetését. Végül a 2.6 alfejezetben röviden ismertetjük a később részletesebben vizsgált rendszereket, melyek mindegyike előáll a szimmetria-redukciós eljárás alkalmazásával.

A 3. fejezetben egy szuperintegrálható rendszert vizsgálunk, nevezetesen a racionális Ruijsenaars–Schneider modellt. Az olyan Liouville integrálható rendszereket nevezik szuperintegrálhatónak, amelyek a Poisson kommutáló mozgásállandókon kívül extra időfüggetlen mozgásállandókkal rendelkeznek. Vizsgálatainkhoz felhasználjuk a racionális Ruijsenaars–Schneider modell 2.5 alfejezetben vázolt szimmetria-redukciós levezetését. A fejezetben alkalmas függvényekkel realizáljuk a Wojciechowski által a racionális Calogero modellben kimutatott Poisson zárójel algebrát [55]. A megfelelő Poisson zárójel relációkat direkt számolás helyett szimmetria-redukciós gondolatmenettel határozzuk meg [4]. Az említett algebrát felhasználjuk extra mozgásállandók konstrukciójára. A fejezet második felében a globális nemkompakt hatás-szög transzformáció és a maximális szuperintegrálhatóság kapcsolatát mutatjuk be.

A 4. fejezetben a hiperbolikus Sutherland modell egy úgynevezett $BC(n)$ általánosításával foglalkozunk, mely „töltött” részecskét tartalmaz. Az első ilyen általánosítás Calogero nevéhez fűződik [10], melyet később Olshanetsky és Rogov interpretált szimmetria-redukciós nézőpontból [38]. Az általunk vizsgált általánosítás a pozitív félegyenesen mozgó pozitívan és negatívan töltött részecskéket ír le. Az azonos töltésű részecskék között taszító míg az ellentétes töltésűek között vonzó kölcsönhatás lép fel. A részecskék kölcsönhatnak egy az origóban lefixált töltéssel és tükörképeikkel is. A fejezetben szimmetria-redukciós módszerrel vezetjük le a modellt [5], amelyhez az $SU(n,n)$ Lie-csoportot használjuk. Itt először rövid áttekintést adunk az $SU(n,n)$ Lie-csoportról és Lie-algebrájáról. Ezután alkalmas módon redukáljuk az $SU(n,n)$ csoporton mozgó „szabad részecskét”, amelynek eredményeként adódik az említett modell. Az eljárás nagy előnye, hogy a modell Liouville integrálhatósága automatikusan teljesül. Végezetül bemutatjuk, hogy a redukált modell hamiltoni folyamai hogyan konstruálhatóak meg a szabad folyamokból kiindulva.

Az 5. fejezetben a trigonometrikus Sutherland modell dualitási relációit vizsgáljuk. Ezt a problémát már Ruijsenaars [44] is vizsgálta, azonban munkája nem foglalkozik az általunk [20]-ben kidolgozott csoportelméleti-geometriai interpretációval. Dualitásról Liouville integrálható sokrészecske rendszerek esetén szokás beszélni. A duális párok között létezik egy olyan szimplektomorfizmus, ami azonosítja az egyik rendszer hatás változóit a másik rendszer részecske pozíció változóival és fordítva. Ezt a transzformációt dualitási transzformációnak nevezzük. A Sutherland modell lehetséges fizikai interpretációjához különböző konfigurációs terek tartoznak. Választástól függően a modell egyenesen mozgó megkülönböztethető vagy körön mozgó megkülönböztethető, illetve megkülönböztethetetlen részecskéket ír le. Az említett konfigurációs terek között fedőleképezések vezethetők be, amelyek szimplektikus fedőleképezéseket indukálnak a megfelelő fázisterek között. Mindhárom fázistérválasztáshoz alkalmas duális Ruijsenaars modell tartozik. A fejezetben a [20] cikkünket követve bemutatom az imént vázolt fedőleképezések és dualitási transzformációk kapcsolatát az

$$\mathbb{R} \times SU(n) \longrightarrow U(1) \times SU(n) \longrightarrow U(n) \tag{1.11}$$

csoportelméleti homomorfizmusokkal. Vizsgálatainkhoz ez esetben is a szimmetria redukciót hívjuk segítségül. A fejezet első felében leírjuk az $U(n)$ koérintő nyalábjának szimplektikus redukcióját. Majd a redukált fázistér két modelljét konstruáljuk meg, melyek a felhasznált geometriai képnek köszönhetően természetes módon duális kapcsolatban állnak. Ezután ismertetjük az $U(n)$ fedéseihez tartozó koérintő nyalábokból adódó redukált fázisterek modelljeit és a duális modellpárok, valamint a fedőterek közt fennálló kapcsolatokat.

A dolgozat utolsó fejezetében röviden összefoglaljuk a főbb eredményeket és megemlítünk néhány érdekes nyitott problémát is.

2. Háttérismeretek áttekintése

2.1. Analitikus mechanikai alapok és integrálhatóság

Ebben az alfejezetben először áttekintjük az analitikus mechanika tárgyalását Lagrange és Hamilton formalizmusban; majd rátérünk az integrálhatósággal és a szimmetria redukcióval kapcsolatos fogalmak és technikák ismertetésére.

Tekintsünk egy konzervatív, holonom mechanikai rendszert, melynek n dimenziós konfigurációs tere lokálisan $Q \subseteq \mathbb{R}^n$. A lehetséges mozgásállapotok halmazát a konfigurációs tér TQ érintő nyalábja, az úgynevezett sebességfázistér alkotja. A sebességfázistér a $(q, \dot{q})$ pontok (az általános koordináták és általános sebességek) halmaza.

A Lagrange formalizmusban alapvető szerepet játszik az extremális hatás elve, amelyet Hamilton-elvnek is neveznek. A Hamilton-elv kimondja, hogy a megvalósuló időfejlődés a hatásfunkcionál (S) extrémumához tartozik; a hatás a Lagrange-függvény (L) időintegráljaként áll elő, azaz a következő funkcionál extrémumát keressük:

$$S[\gamma] = \int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot{q}(t))\, dt. \tag{2.1}$$

Vizsgáljuk meg a hatás variációjának eltűnését ($\delta S = 0$), a végpontok fixen hagyása ($\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$) mellett, figyelembe véve a variációk (δq^i-k) függetlenségét! Így a hatás extrémumának szükséges feltételéhez, az Euler-Lagrange egyenletekhez jutunk:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = \frac{\partial L}{\partial q^i}\,, \qquad i = 1, \ldots, n\,. \tag{2.2}$$

Természetes mechanikai rendszerek [3] Lagrange-függvénye $L = T - V$ alakú, ahol T a kinetikus, V pedig a potenciális energiát jelöli.

Lagrange formalizmusról Hamilton formalizmusra a Legendre transzformáció segítségével térhetünk át. Ennek lényege az, hogy új független változóknak tekintjük az általános koordinátákat és az általános impulzusokat. Az általános impulzusok a Lagrange függvényből az alábbi módon adódnak:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\,, \qquad i = 1, \ldots, n\,. \tag{2.3}$$

Az áttérés során megköveteljük a $(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j})$ Jacobi mátrix invertálhatóságát. Abban az esetben, ha ez nem teljesül kényszerek bevezetése és a Dirac algoritmus elvégzése válik szükségessé. A kényszeres rendszerek vizsgálatáról Dirac [16] munkájában, valamint Henneaux és Teitelboim [28] művében olvashatunk. A Lagrange-függvényből Legendre-transzformáció segítségével a következő módon adódik a rendszer Hamilton-függvénye:

$$H(q, p) = \sum_i p_i \dot{q}^i - L(q, \dot{q}). \tag{2.4}$$

A rendszer időfejlődését a Hamilton-féle kanonikus egyenletek írják le:

$$\frac{dq^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^i}, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{2.5}$$

Az itt használt általános koordináták és általános impulzusok összességét kanonikus koordinátáknak nevezzük. Ezek a Q konfigurációs tér T^*Q koérintő nyalábját parametrizálják, amely momentumfázistér néven is ismeretes.

A szimplektikus formalizmus lehetőséget ad arra, hogy a Hamilton formalizmust kiterjesszük általánosabb $\mathcal{P}$ sokaságra.

Lássuk el $\mathcal{P}$-t egy ω 2-formával. A $(\mathcal{P}, \omega)$ pár **szimplektikus sokaság**ot alkot, amennyiben ω eleget tesz a következő tulajdonságoknak:

1. ω zárt, azaz $d\omega = 0$
2. ω nem-degenerált.

Ekkor ω-t szimplektikus formának nevezzük. A szimplektikus forma gyakran egy θ 1-forma külső deriváltjaként adódik. A T^*Q koérintő nyaláb esetében $\omega = \sum_i dp_i \wedge dq^i$ és $\theta = \sum_i p_i dq^i$.

Tekintsünk a $(\mathcal{P}, \omega)$ szimplektikus sokaságon egy $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{P})$ függvényt. Ilyenkor X_f-et az f függvény **hamiltoni vektormező**jének nevezzük, ha eleget tesz az alábbi összefüggésnek:

$$\omega_x(v, X_f(x)) = \langle df(x), v \rangle \quad \forall v \in T_x\mathcal{P}, \tag{2.6}$$

a sokaság $\forall x \in \mathcal{P}$ pontjában. Ekkor a H Hamilton-függvényhez tartozó időfejlődést meghatározó egyenlet

$$\frac{dc(t)}{dt} = X_H(c(t)), \tag{2.7}$$

ahol $c(t)$ az X_H integrálgörbéje.

A Hamilton formalizmushoz kapcsolódóan célszerű bevezetni a Poisson zárójel fogalmát. A **Poisson zárójel** $\{\cdot,\cdot\}$ egy $\mathcal{P}$ sokaságon olyan $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{P}) \times \mathcal{C}^\infty(\mathcal{P}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathcal{P})$ leképezés amire igaz, hogy:

1. bilineáris
2. antiszimmetrikus $\{f, g\} = -\{g, f\}$
3. teljesíti a Jacobi azonosságot $\{\{f, g\}, h\} + \{\{g, h\}, f\} + \{\{h, f\}, g\} = 0$
4. kielégíti a Leibniz-szabályt $\{fg, h\} = f\{g, h\} + \{f, h\} g$.

A $(\mathcal{P}, \{\cdot,\cdot\})$ **Poisson sokaság**, ha $\{\cdot,\cdot\}$ kielégíti az említett feltételeket.

Tüntessünk ki a $(\mathcal{P}, \{\cdot,\cdot\})$ Poisson sokaságon egy $H \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{P})$ függvényt, ekkor $(\mathcal{P}, \{\cdot,\cdot\}, H)$ Hamilton-féle dinamikai rendszert alkot. A rendszer dinamikáját a következő egyenlet definiálja:

$$\frac{df}{dt} = \{f, H\}, \qquad \forall f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{P}). \tag{2.8}$$

Vezessünk be a $\mathcal{P}$ sokaság egy pontjának környezetében $(x^1, \dots, x^n)$ lokális koordinátákat. Továbbá definiáljuk a $B^{\alpha,\beta} := \{x^\alpha, x^\beta\}$ Poisson tenzort. A Leibniz-szabály következményeként $f, g \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{P})$ függvények Poisson zárójele lokálisan megadható az alábbi módon:

$$\{f, g\} = \sum_{\alpha,\beta} B^{\alpha,\beta} \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} \frac{\partial g}{\partial x^\beta} . \tag{2.9}$$

Fontos megjegyezni, hogy bármely $(\mathcal{P}, \omega)$ szimplektikus sokaság természetes módon Poisson sokaság is. Ilyenkor az ω szimplektikus formából a következő összefüggéssel adódnak a megfelelő Poisson zárójelek:

$$\{f, g\} := \omega\left(X_g, X_f\right) . \tag{2.10}$$

A Poisson zárójelre (2.10) szerint az alábbi egyenlőségek is teljesülnek

$$X_g(f) = \mathcal{L}_{X_g} f = df(X_g) = \omega(X_g, X_f) = \{f, g\} . \tag{2.11}$$

Fázistérre példaként tekintsük az $\mathbb{R}^n$ koérintő nyalábját, $T^*\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n = \{(q,p) \,|\, q, \in \mathbb{R}^n,\, p \in \mathbb{R}^n\}$ és a kanonikus szimplektikus formát, $\omega(q,p) = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq^i$. Ekkor egy f függvényhez tartozó hamiltoni vektormező

$$X_f = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p_i} \right) . \tag{2.12}$$

Természetesen hasonló formula érvényes lokálisan bármely T^*Q koérintő nyaláb és a megfelelő szimplektikus forma esetén.

2.2. Integrálhatóság, szuperintegrálhatóság

Legyen $(\mathcal{P}, \{\cdot,\cdot\}, H)$ egy $2n$ dimenziós Hamilton-féle dinamikai rendszer. Ezt a rendszert **Liouville integrálható**nak nevezzük, amennyiben rendelkezik n független, egymással Poisson kommutáló $h_i \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{P})$ mozgásállandóval[1], amelyekhez tartozó vektormezők teljesek.

A Liouville tétel kimondja, hogy Liouville integrálható rendszer esetében a mozgásegyenlet megoldása kvadratúrával megadható.

Rögzítsük le egy $2n$ dimenziós Liouville integrálható rendszer h_i involucióban álló mozgásállandóinak értékét. Szorítkozzunk a h_i mozgásállandók, hogy

$$\mathcal{P}_{h^0} = \{x \in \mathcal{P} | h_i(x) = h_i^0 \in \mathbb{R} \quad \forall i\} \tag{2.13}$$

közös szintfelületére. Legyen h^0 reguláris értéke a $h = (h_1, \dots, h_n) : \mathcal{P} \to \mathbb{R}^n$ leképezésnek.[2] Ekkor az **Arnol'd–Liouville tétel** [3] kimondja, hogy:

[1]A h_i függvényeket megválaszthatjuk úgy hogy egyikük megegyezzen a rendszer Hamilton-függvényével H-val.

[2]Egy adott h^0 reguláris értéke h-nak, amennyiben $T_x h$ szürjektív minden $x \in \mathcal{P}_{h^0}$ pontban.

1. $\mathcal{P}_{h^0}$ egy környezetében bevezethetők $I_1, \ldots I_n$, $\phi_1, \ldots, \phi_n$ koordináták $I_j = I_j(h)$ invertálható relációkkal, melyekre $\{\phi_k, I_j\} = \delta_{jk}$. Természetesen teljesül az egymással involúcióban álló hatásváltozókra
$$\frac{dI_j}{dt_i} = \{I_j, I_i\} = 0.$$

2. Amennyiben $\mathcal{P}_{h^0}$ kompakt, akkor $\phi_1, \ldots, \phi_n$-k választhatók modulo 2π értelmezett koordinátáknak és $\mathcal{P}_{h^0}$ diffeomorf az n dimenziós tórusszal. Ilyenkor $I_1, \ldots I_n$ hatásváltozók, míg $\phi_1, \ldots, \phi_n$ szögváltozók néven ismeretesek.

A fenti állításokban implicite azt is feltettük, hogy $\mathcal{P}_{h^0}$ összefüggő. Ez nem jelenti az általánosság megszorítását, hiszen mindig fókuszálhatunk $\mathcal{P}_{h^0}$ egy összefüggő komponensére.

Liouville integrálható rendszerre közismert példák a harmonikus oszcillátor, a Kepler probléma, valamint a később ismertetendő Calogero típusú modellek.

A $H(q,p) = p^2/(2m) + (1/2)m\omega_0^2 q^2$ Hamilton-függvénnyel jellemzett harmonikus oszcillátor esetében a q, p kanonikus koordináták és a ϕ, J szög és hatásváltozók között a következő kapcsolat áll fenn:
$$q = \sqrt{\frac{2J}{m\omega_0}}\sin(\phi) \quad \text{és} \quad p = \sqrt{2m\omega_0}\cos(\phi)\,.$$

A szög- és hatásváltozók fontos szerephez jutnak az adiabatikus invariánsok meghatározásánál és a kanonikus perturbációszámításban. Az említett módszerek elméleti hátteréről például José és Saletan [30] könyvéből nyerhetünk áttekintést.

Akkor beszélünk **szuperintegrálható** rendszerről, ha egy $2n$ dimenziós Liouville integrálható rendszer rendelkezik további $1 \leq k \leq n-1$ mozgásállandóval, legyenek ezek $f_j \in C^\infty(\mathcal{P})$, továbbá igaz a
$$h_1, \ldots, h_n, f_1, \ldots, f_k \tag{2.14}$$
mozgásállandókra, hogy függetlenek a $\mathcal{P}$ sokaság egy sűrű részhalmazán. Maximálisan szuperintegrálható rendszerről beszélünk, ha a rendszer maximális számú extra mozgásállandóval rendelkezik, azaz $k = (n-1)$.

A szuperintegrálhatóság témakörét általánosan áttekintő irodalomként a Tempesta és Winternitz által összeállított [52] kiadványra támaszkodhatunk. Maximális szuperintegrálhatóság esetén a h_i^0 és f_j^0 állandók által meghatározott közös szintfelület
$$h_i = h_i^0 \quad (\forall i = 1, \ldots, n) \quad \text{és} \quad f_j = f_j^0 \quad (\forall j = 1, \ldots, (n-1)) \tag{2.15}$$
kompaktságából következik, hogy a $(\mathcal{P}, \{\cdot,\cdot\}, H)$ rendszer folyamai periodikusak.

Periodikus folyamokkal rendelkező szuperintegrálható rendszerekre példa a harmonikus oszcillátor, valamint a Kepler probléma negatív energiás szektora. További példákat jelent a Kepler probléma néhány általánosítása, melyekről Ballesteros és társszerzői [8] publikációjában olvashatunk. Az alacsony dimenziós szuperintegrálható rendszerek klasszifikálásáról bővebben Evans, valamint Miller és munkatársai [19, 31] cikkeiben olvashatunk.

2.2.1. Lax pár

Az integrálható rendszerek vizsgálatánál gyakran használt technika a mozgásegyenlet **Lax pár** segítségével történő származtatása, mellyel kapcsolatban ismertetünk néhány alapvető fogalmat. Először is definiáljuk a Lax-féle dinamikai rendszer fogalmát.

Tekintsünk egy $(\mathcal{P}, \{\cdot,\cdot\}, H)$ hamiltoni rendszert a $dx_\alpha/dt = \{x_\alpha, H\}$ dinamikai egyenlettel. Ekkor azt mondjuk, hogy ez Lax-féle rendszer, ha található egy $\mathcal{G}$ mátrix Lie-algebra és $L(x), P(x) \in \mathcal{G}$ függvények, melyekkel az evolúciós egyenlet Lax alakban írható:

$$\frac{dL}{dt} = [P, L]\,. \tag{2.16}$$

Itt L az úgynevezett Lax mátrix, a P és L együtt alkotja a **Lax pár**t. Vegyük észre, hogy L bármely pozitív k hatványára teljesül a $dL^k/dt = [P, L^k]$ összefüggés, ahonnan azonnal adódik, hogy $\mathrm{tr}(L^k)$ mozgásállandó. Tehát L sajátértékei is időben állandóak.

A mozgásegyenlet előállítása Lax pár segítségével nem egyértelmű. Legyen G egy mátrix Lie-csoport, melynek Lie-algebrája $\mathcal{G}$, továbbá legyen $g(x) \in G$ tetszőleges mátrixfüggvény. Ekkor az alábbi „mértéktranszformáció”

$$L \longmapsto L^g = g^{-1}Lg \tag{2.17}$$

$$P \longmapsto P^g = g^{-1}Pg + g^{-1}\dot{g} \tag{2.18}$$

megőrzi a Lax-egyenlet alakját és a $\mathrm{tr}\left(L^k\right) = \mathrm{tr}\left((L^g)^k\right)$ összefüggés is fennáll.

2.2.2. Klasszikus r-mátrix

Az integrálható rendszerek leírásánálak fontos kérdése, hogy milyen algebrai struktúrák állnak az integrálhatóság hátterében. Itt központi szerepet játszik a már megismert Lax páron kívül az úgynevezett R-mátrix módszer. Először is ismertetjük a témában alapvető Babelon–Viallet tételt, melyet a [7] cikkben publikáltak.

Tegyük fel, hogy az evolúciós egyenletünk (2.16) Lax alakban írható. Ekkor érdekes probléma lehet az L Lie-algebra értékű függvények egymás közti Poisson zárójeleinek vizsgálata. Ehhez fejtsük ki L-et a $\mathcal{G}$ Lie-algebra $\{T_i\}$ bázisában, azaz írjuk $L = \sum_i L^i T_i$ alakban. Ezután meghatározhatjuk az L^i függvények egymás közötti Poisson zárójeleit, $\{L^i, L^j\}$-t. Az eredményt az alábbi módon foglalhatjuk össze:

$$\{L_1, L_2\} := \sum_{i,j} \{L^i, L^j\} T_i \otimes T_j\,, \tag{2.19}$$

ahol alkalmaztuk az $L_1 = L \otimes \mathbf{1}$ és $L_2 = \mathbf{1} \otimes L$ jelöléseket.

Babelon és Viallet [7] munkájában megmutatta, hogy a (2.19) egyenlet alkalmas $a\,, b \in \mathcal{G}\otimes\mathcal{G}$ függvényekkel

$$\{L_1, L_2\} = [a_{12}, L_1] + [b_{12}, L_2] \tag{2.20}$$

alakban írható, amennyiben a $\mathrm{tr}(L^k)$ függvények egymással involúcióban állnak.[3] Kihasználva

[3] Adott $a \in \mathcal{G} \otimes \mathcal{G}$ esetén alkalmazzuk az $a_{12} = \sum_{i,j} a^{ij} T_i \otimes T_j$ és $a_{21} = \sum_{i,j} a^{ji} T_i \otimes T_j$ jelöléseket.

a Poisson zárójel antiszimmetrikusságát a (2.20) egyenlet új alakban írható. A

$$r_{12} = \frac{1}{2}(a_{12} - b_{21}) \tag{2.21}$$

jelölés bevezetésével a (2.20) összefüggés az

$$\{L_1, L_2\} = [r_{12}, L_1] - [r_{21}, L_2] \tag{2.22}$$

alakot ölti. Itt r-et dinamikai r-mátrixnak nevezzük. Speciális esetekben r konstans (nem-dinamikai) is lehet. Nem-degenerált invariáns $\langle\cdot,\cdot\rangle$ skaláris szorzattal rendelkező Lie-algebra esetén tekinthetünk r-re $\mathcal{G} \to \mathcal{G}$ lineáris leképezésként a

$$R(X) := \sum_{i,j} r_{12}^{ij} T_i \langle T_j, X\rangle \qquad \forall X \in \mathcal{G} \tag{2.23}$$

definíció felhasználásával. Ha $L(X) := \langle L, X\rangle$, akkor a megismert összefüggések alapján belátható, hogy

$$\{L(X), L(Y)\} = L([X,Y]_R)\,, \quad \text{ahol} \quad [X,Y]_R =: [R(X), Y] + [X, R(Y)]\,. \tag{2.24}$$

Érdemes megjegyezni, hogy minden Liouville integrálható rendszer alkalmas nilpotens Lie-algebra segítségével Lax alakban írható és ezt felhasználva megkonstruálható az r-mátrix struktúra is. A [7] cikket követve tekintsünk egy $\mathcal{N}$ Lie-algebrát, melynek $\{E_i, H_i\}$ bázisára teljesülnek a

$$[H_i, H_j] = 0\,, \quad [H_i, E_j] = 2\delta_{ij} E_j\,, \quad [E_i, E_j] = 0 \tag{2.25}$$

kommutációs relációk. A szög- és hatásváltozókat használva az

$$L = \sum_i (I_i H_i + 2 I_i \phi_i E_i) \quad \text{és} \quad P = -\sum_i \frac{\partial H(I)}{\partial I_i} E_i \tag{2.26}$$

függvények alkotják a Lax párt és a megfelelő r-mátrixot az alábbi módon adhatjuk meg:

$$r_{12} = \sum_i (E_i \otimes H_i - H_i \otimes E_i)\,. \tag{2.27}$$

2.3. A szimplektikus redukció módszere

A dolgozatban később sokat használt Marsden–Weinstein redukciós eljárás lényege az, hogy a szimmetriához tartozó megmaradó mennyiségek („momentum") értékét rögzítve a hamiltoni dinamikai rendszer egy alacsonyabb dimenziós faktortérre vetíthető, és így csökkenthetjük a szabadsági fokok számát. Az általunk tanulmányozni kívánt rendszerek többsége előáll valamilyen magasabb dimenziós konfigurációs téren történő mozgás redukciójaként.

2.3.1. Momentum leképezés

A későbbiekben olyan transzformációkat kívánunk tanulmányozni, melyek Lie-csoportot alkotnak, és a vizsgált rendszer Hamilton-függvénye valamint Poisson zárójele invariáns ezekre nézve. Ilyenkor a szimmetria csoport minden egyparaméteres részcsoportjához tartozik egy megmaradó mennyiség. Jól ismert példa a forgásszimmetria háromdimenziós centrális erőtér esetén. Ekkor a szimmetria csoport az $SO(3)$ Lie-csoport és a megmaradó mennyiség az impulzusmomentum. Ennek általánosítása a momentum leképezés.

Legyen adott $(\mathcal{P}, \{\cdot,\cdot\}, G, \Psi)$, ahol $(\mathcal{P}, \{\cdot,\cdot\})$ Poisson sokaság, G Lie-csoport, továbbá Ψ a G Lie-csoport bal hatása $\mathcal{P}$-n.

A Ψ csoporthatást kanonikusnak nevezzük, ha invariánsan hagyja a Poisson zárójeleket, azaz

$$\Psi_g^* \{F_1, F_2\} = \left\{\Psi_g^* F_1, \Psi_g^* F_2\right\} \tag{2.28}$$

fennáll $\forall F_1, F_2 \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{P})$ és $\forall g \in G$ esetében.

Legyen $(\mathcal{P}, \omega)$ szimplektikus sokaság. A Ψ csoporthatást szimplektikusnak nevezzük, amennyiben $\Psi_g^*\omega = \omega$ fennáll $\forall g \in G$-re. Ilyenkor a hatás szimplektikussága ekvivalens a kanonikusságával.

Bármely $\xi \in \mathcal{G}$ Lie-algebra elemhez hozzárendelhetünk egy $\xi_\mathcal{P}$ vektormezőt $\mathcal{P}$-n, amit **infinitezimális generátor**nak nevezünk. Ezt a vektormezőt az alábbi összefüggés definiálja:

$$\xi_\mathcal{P}(z) = \frac{d}{dt}\Psi_{\exp(t\xi)}(z)\bigg|_{t=0}. \tag{2.29}$$

Belátható, hogy egy $\xi_\mathcal{P}$ infinitezimális generátor $\Psi_{g^{-1}}$-el történő „visszahúzottjára” igaz, hogy

$$\Psi_{g^{-1}}^* \xi_\mathcal{P} = (\mathrm{Ad}_g \xi)_\mathcal{P}. \tag{2.30}$$

A fenti összefüggés infinitezimális változata:

$$[\xi_\mathcal{P}, \eta_\mathcal{P}] = -[\xi, \eta]_\mathcal{P}. \tag{2.31}$$

A kanonikus csoporthatás (2.28) definíciójának infinitezimális alakja

$$\xi_\mathcal{P}[\{F_1, F_2\}] = \{\xi_\mathcal{P}[F_1], F_2\} + \{F_1, \xi_\mathcal{P}[F_2]\}. \tag{2.32}$$

Itt a $\xi_\mathcal{P}[F]$ jelöli az F függvény deriváltját $\xi_\mathcal{P}$ mentén.

Szimplektikus esetben az $\mathcal{L}_{\xi_\mathcal{P}}\omega = 0$ összefüggésre jutunk, azaz $\xi_\mathcal{P}$ lokálisan hamiltoni vektormező. Hasson a G Lie-csoport kanonikus módon a $\mathcal{P}$ Poisson sokaságon. Tegyük fel, hogy létezik egy lineáris leképezés $J : \mathcal{G} \to C^\infty(\mathcal{P})$ amelyre igaz, hogy a $J(\xi)$-hez tartozó hamiltoni vektormező eleget tesz az alábbi egyenlőségnek:

$$X_{J(\xi)} = \xi_\mathcal{P}, \qquad \forall \xi \in \mathcal{G}. \tag{2.33}$$

Definiáljuk a $\mathbf{J} : \mathcal{P} \to \mathcal{G}^*$ leképezést a következőképpen:

$$\langle \mathbf{J}(z), \xi \rangle = J(\xi)(z), \qquad \forall \xi \in \mathcal{G} \quad \text{és} \quad \forall z \in \mathcal{P}. \tag{2.34}$$

Ekkor a $\mathbf{J}$ leképezést **momentum leképezés**nek nevezzük. Felhasználva az infinitezimális generátor ($\{F, J(\xi)\} = \xi_{\mathcal{P}}[F]$) definícióját, a momentum leképezés komponenseihez és komponensek Poisson zárójeleihez tartozó hamiltoni vektormezők között a következő alapvető fontosságú összefüggésre jutunk:

$$X_{J([\xi,\eta])} = [\xi, \eta]_{\mathcal{P}} = -[\xi_{\mathcal{P}}, \eta_{\mathcal{P}}] = -[X_{J(\xi)}, X_{J(\eta)}] = X_{\{J(\xi),J(\eta)\}}. \tag{2.35}$$

A fenti összefüggésnek egy elegendő feltétele, amely a "legszebb" esetekben fennáll:

$$J([\xi, \eta)]) = \{J(\xi), J(\eta)\}\,, \qquad \forall \xi, \eta \in \mathcal{G}\,. \tag{2.36}$$

Ezekben az esetekben a hatást hamiltoni csoporthatásnak nevezzük.

A $\mathbf{J}$ momentum leképezést **ekvivariáns**nak nevezzük, ha eleget tesz az alábbi feltételnek:

$$\mathbf{J} \circ \Psi_g = \mathrm{Ad}^{\sharp}_g \circ \mathbf{J}\,. \tag{2.37}$$

Ezt a következő kommutatív diagrammal szemléltethetjük:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{P} \arrow[r, "\mathbf{J}"] \arrow[d, "\Psi_g"'] & \mathcal{G}^* \arrow[d, "\mathrm{Ad}^{\sharp}_g"] \\ \mathcal{P} \arrow[r, "\mathbf{J}"] & \mathcal{G}^* \end{tikzcd}$$

Itt $\mathrm{Ad}^{\sharp}_g :: \mathcal{G}^* \to \mathcal{G}^*$ jelöli a koadjungált hatást, amely az $\mathrm{Ad}_g : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ adjungált hatásból az $\mathrm{Ad}^{\sharp}_g := (\mathrm{Ad}_{g^{-1}})^T$ definícióval származtatható.

Belátható, hogy az ekvivariancia infinitezimális változata a (2.36) összefüggés. A bizonyítás és a fent említett fogalmak részletes kifejtése megtalálható Abraham és Marsden alapvető monográfiájában [1].

2.3.2. Lie–Poisson zárójel és koadjungált pálya szimplektikus formája

Gyakran használt Poisson zárójel az úgynevezett Lie–Poisson zárójel, amelynek egy speciális esete a már említett háromdimenziós forgáscsoport esetén az impulzusmomentum Poisson zárójel algebra. A Lie-Poisson zárójel fogalma Sophus Lie-től ered.

Minden $\mathcal{G}$ Lie-algebra duálisa, $\mathcal{G}^*$, Poisson sokaság a Lie–Poisson zárójellel, amit a következőképpen definiálunk:

$$\{f, h\}\,(\mu) = \langle \mu, [\nabla f(\mu), \nabla h(\mu)]\rangle\,, \tag{2.38}$$

ahol $\mu \in \mathcal{G}^*$ és $f, h \in C^{\infty}(\mathcal{G}^*)$, továbbá $\mathcal{G}$-t azonosítottuk a $\mathcal{G}^{**}$-al, így $\nabla f(\mu) \in \mathcal{G}$.[4]

Legyen $\mathcal{G}$ bázisa T_a, valamint duális bázisa T^a. Jelölje C^a_{bc} a $\mathcal{G}$ struktúra állandóit ($[T_b, T_c] = C^a_{bc} T_a$). Amennyiben kifejtjük μ-t lokális koordinátákban ($\mu = \sum_a \mu_a T^a$) a Lie–Poisson zárójel az alábbi formában írható fel:

$$\{f, h\}\,(\mu) = \sum_{a,b,c} \mu_a C^a_{bc} \frac{\partial f}{\partial \mu_b} \frac{\partial h}{\partial \mu_c}. \tag{2.39}$$

[4]Itt ∇f az f függvény „gradiense”, azaz fennáll a $\langle \delta, \nabla f(\mu)\rangle = \frac{d}{dt}\big|_{t=0} f(\mu + t\delta)$ összefüggés $\forall \delta \in \mathcal{G}^*$ esetén.

Minden koadjungált pálya természetes módon szimplektikus sokaságnak is tekinthető.[5] Ez az eredmény Kirillov, Kostant és Souriau munkájának eredménye [33, 34, 49].

A G Lie-csoport $\mathcal{O}(\mu) \subset \mathcal{G}^*$ koadjungált pályáján a szimplektikus forma

$$\omega^{\mathcal{O}(\mu)}(\mu)\left(\mathrm{ad}^\sharp_X(\mu), \mathrm{ad}^\sharp_Y(\mu)\right) = \langle \mu, [X,Y]\rangle, \quad \forall X, Y \in \mathcal{G}, \tag{2.40}$$

ahol $\mathrm{ad}^\sharp_X = X_{\mathcal{G}^*}$ a koadjungált hatás infinitezimális generátora. A $\omega^{\mathcal{O}(\mu)}(\mu)$ szimplektikus formához tartozó Poisson zárójel megegyezik a Lie–Poisson zárójel pályára vett megszorításával.

Későbbi számolásainkban gyakran azonosítani fogjuk a $\mathcal{G}$ Lie-algebrát duálisával, invariáns skaláris szorzat révén. Érdemes még megjegyezni, hogy a koadjungált hatás kanonikus a Lie–Poisson zárójelre nézve, azaz

$$\{f \circ \mathrm{Ad}^\sharp_g, g \circ \mathrm{Ad}^\sharp_g\}(\mu) = \{f, g\}(\mathrm{Ad}^\sharp_g \mu). \tag{2.41}$$

A fenti tulajdonság azonnal adódik a $\nabla f(\mathrm{Ad}^\sharp_g \mu) = \mathrm{Ad}_g(\nabla(f \circ \mathrm{Ad}^\sharp_g)(\mu))$ összefüggés és a Lie–Poisson zárójel definíciójának felhasználásával. A koadjungált hatáshoz tartozó ekvivariáns momentum leképezés az identikus leképezés ($\mathbf{J}(\mu) = \mu$).

2.3.3. Marsden–Weinstein redukció

Több fontos hamiltoni rendszer esetében a dinamika részben ismert, így érdemes a már ismert változókat eliminálni és egy redukált fázistérre szorítkozni. Ez történik például a Kepler probléma esetében, amikor az impulzusmomentumot felhasználva a többi egyenlettől független radiális egyenletre jutunk. A Marsden–Weinstein-féle szimplektikus redukciós technika is ilyen változók eliminálására ad lehetőséget, bizonyos kényszerek előírása után. Számos esetben valamilyen magasabb dimenziójú konfigurációs téren történő szabad mozgás megfelelő redukciójával fizikailag érdekes rendszerek vezethetők le. Az általunk később vizsgált rendszerek is előállnak így.

Egy $(\mathcal{P}, \omega, H)$ rendszer esetében a G csoport Ψ_g hatása szimmetria, amennyiben kanonikus módon hat (megőrzi az ω szimplektikus formát) és invariánsan hagyja a H Hamilton-függvényt, azaz

$$\Psi^*_g \omega = \omega \quad \text{és} \quad H \circ \Psi_g = H. \tag{2.42}$$

Legyen $\mathbf{J} : \mathcal{P} \to \mathcal{G}^*$ ezen csoporthatáshoz tartozó ekvivariáns momentum leképezés.

A momentum leképezés komponensei Poisson kommutálnak a H Hamilton-függvénnyel, azaz mozgásállandók. Momentum kényszerek előírásával és a szimmetria csoport hatásának felhasználásával alacsonyabb dimenziójú hamiltoni dinamikai rendszerhez juthatunk.

A redukciónál megköveteljük, hogy a kényszerül választott μ momentum érték reguláris legyen, azaz a $T\mathbf{J}$ derivált leképezés szürjektív $\mathbf{J}^{-1}(\mu)$ minden pontjában. Ekkor $\mathbf{J}^{-1}(\mu)$ beágyazott részsokaság. A momentum értékét fixen hagyó részcsoportja G-nek

[5] A G Lie-csoport $\mathcal{G}^* \ni \mu$ elemen átmenő koadjungált pályáját az $\mathcal{O}(\mu) = \{\mathrm{Ad}^\sharp_g \mu \in \mathcal{G}^* | g \in G\}$ halmaz alkotja. Az $\mathrm{Ad}^\sharp$ koadjungált hatás infinitezimális változata $\mathrm{ad}^\sharp_X$, ami az adjungált hatás infinitezimális változatából $\mathrm{ad}^\sharp_X = (\mathrm{ad}_{-X})^T$ összefüggéssel adódik.

$G_\mu = \{g \in G | \mathrm{Ad}^\sharp_g \mu = \mu\}$. A továbbiakban elvárjuk G_μ-től, hogy szabad és „proper”[6] módon hasson (az utóbbi kompakt csoportok esetében automatikusan teljesül).

A Marsden–Weinstein tétel [35] kimondja, hogy amennyiben a G csoporthatás szimmetriája a rendszernek és teljesülnek az említett technikai feltételek akkor $\mathcal{P}_\mu = \mathbf{J}^{-1}(\mu)/G_\mu$ (G_μ pályáinak tere $\mathbf{J}^{-1}(\mu)$-ben) síma szimplektikus sokaság lesz. A redukció egyértelmű $(\mathcal{P}_\mu, \omega_\mu, H_\mu)$ Hamilton-féle dinamikai rendszert ad, melyre a

$$\pi_\mu : \mathbf{J}^{-1}(\mu) \to \mathcal{P}_\mu = \mathbf{J}^{-1}(\mu)/G_\mu \tag{2.43}$$

szubmerzió a megfelelő hamiltoni folyamokat egymásba viszi.

A $(\mathcal{P}_\mu, \omega_\mu, H_\mu)$ redukált rendszer szimplektikus formáját és Hamilton-függvényét egyértelműen meghatározza a következő két egyenlet:

$$\pi^*_\mu \omega_\mu = i^*_\mu \omega\,, \qquad \pi^*_\mu H_\mu = i^*_\mu H. \tag{2.44}$$

Itt $i_\mu : \mathbf{J}^{-1}(\mu) \to \mathcal{P}$ a tautologikus beágyazás. Rögzített μ elem esetén $(\mathcal{P}_\mu, \omega_\mu, H_\mu)$ helyett gyakran $(\mathcal{P}_{\mathrm{red}}, \omega_{\mathrm{red}}, H_{\mathrm{red}})$-et írunk. A redukált sokaságon a Poisson zárójelek legkönnyebben invariáns függvények segítségével adhatók meg. Tekintsük az f és g G-invariáns függvényeket $\mathcal{P}$-n. Ekkor teljesül, hogy:

$$\{f_\mu, g_\mu\}_\mu \circ \pi_\mu = \{f, g\} \circ i_\mu\,, \tag{2.45}$$

ahol $f_\mu \circ \pi_\mu = f \circ i_\mu$ és $g_\mu \circ \pi_\mu = g \circ i_\mu$. Az f_μ és g_μ az úgynevezett redukált függvények és $\{\cdot,\cdot\}_\mu$ az ω_μ szimplektikus formához tartozó Poisson zárójel.

A tétel bizonyításáról és a technikai részletekről bővebben az [1, 25] könyvekben olvashatunk. A redukció során gyakran a G_μ csoport pályáinak egy globális szelését keressük a momentum kényszer által kijelölt felületen, hogy megkonstruáljuk a redukált fázistér egy modelljét.

A fentieket összefoglalva redukciót a következő algoritmus definiálja:

(i) Válasszuk ki a momentum egy $\mu \in \mathcal{G}^*$ reguláris értékét, ekkor $i_\mu : \mathbf{J}^{-1}(\mu) \to \mathcal{P}$ részsokaság.[7]

(ii) A duális Lie-algebra μ pontját fixen hagyó csoportelemek egy G_μ részcsoportot alkotnak, ezen részcsoport elemeivel faktorizálunk a kényszerfelületen. (Mivel a momentum leképezés ekvivariáns, ezért a G_μ pályák tere jól definiált.) Ekkor bevezethetjük a π_μ projekciót a pályák terére és (2.45) segítségével meghatározhatók az invariáns függvények vizsgálatán keresztül a megfelelő redukált Poisson zárójel relációk.

A redukció során megpróbáljuk a kényszerfelület minden pontját kényelmes „normálalakra” hozni G_μ hatása segítségével.

A gyakorlatban igen hasznos eljárásnak bizonyul az úgynevezett **„eltolási trükk”** [1]. Ilyenkor a redukció végrehajtása előtt egy $(\mathcal{P}^{\mathrm{ext}}, \omega^{\mathrm{ext}}, H^{\mathrm{ext}}, J^{\mathrm{ext}})$ kiterjesztett hamiltoni dinamikai rendszert definiálunk, ahol az eredeti fázisteret kiterjesztjük a G csoport $(-\mu)$-n átmenő

[6] A Ψ_g csoporthatást „proper” hatásnak nevezzük, ha a $G \times \mathcal{P} \to \mathcal{P} \times \mathcal{P} : (g, x) \mapsto (\Phi_g x, x)$ leképezés esetén minden kompakt halmaz ősképe is kompakt.

[7] Természetesen itt feltesszük, hogy az $\mathbf{J}^{-1}(\mu)$ nem az üres halmaz.

koadjungált pályájával, O-val[8]. A kiterjesztett momentum értékét pedig 0-nak választjuk. A kiterjesztett rendszer fázistere

$$\mathcal{P}^{\text{ext}} = \mathcal{P} \times O\,,$$

amit ellátunk az

$$\omega^{\text{ext}} = \omega + \omega^{O}$$

szimplektikus formával. Itt ω^O az O koadjungált pálya (2.40) szimplektikus formája. A kiterjesztett rendszert a

$$H^{\text{ext}}(m,\xi) = H(m)$$

Hamilton-függvény definiálja. A momentum leképezés pedig

$$J^{\text{ext}}(m,\xi) = \mathbf{J}(m) + \xi.$$

Ekkor a $(\mathcal{P},\omega,H)$ redukciója μ momentum értéknél megegyezik $(\mathcal{P}^{\text{ext}},\omega^{\text{ext}},H^{\text{ext}})$ redukciójával a 0 kiterjesztett momentumnál, azaz $\mathcal{P}_0^{\text{ext}} \cong \mathcal{P}_\mu$. Ez a technika azért előnyös, mert a teljes szimmetria csoportot felhasználhatjuk a redukciónál „normálalak” kereséséhez.

2.3.4. Lie-csoport koérintő nyalábja

A dolgozat későbbi fejezeteiben előkerülő modellek szimmetria-redukciós levezetéséhez valamely valós G Lie-csoport koérintő nyalábját használjuk fel, ezért ismertetjük ennek egy kényelmes leírását a bal-trivializációt használva. Feltételezzük, hogy a G csoport $\mathcal{G}$ Lie-algebrája rendelkezik egy $\langle\cdot,\cdot\rangle$ invariáns skaláris szorzattal. A balszorzást és a skaláris szorzatot felhasználva a következő azonosításokkal élünk

$$T^*G \simeq G \times \mathcal{G}^* \simeq G \times \mathcal{G} = \{(g, J^R) : g \in G\,, J^R \in \mathcal{G}\}.$$

Lássuk el T^*G-t a

$$\Omega = d\langle J^R, g^{-1}dg\rangle \tag{2.46}$$

kanonikus szimplektikus formával. Legyen $\Delta g \oplus \Delta J^R$ és $\delta g \oplus \delta J^R$ két érintővektor a (g, J^R) pontban. Ekkor $g^{-1}\Delta g \in \mathcal{G}$, $\Delta J^R \in \mathcal{G}$ és az Ω szimplektikus forma a következő értéket veszi fel

$$\Omega_{(g,J^R)}(\Delta g \oplus \Delta J^R, \delta g \oplus \delta J^R) = \langle g^{-1}\delta g, \Delta J^R\rangle - \langle g^{-1}\Delta g, \delta J^R\rangle - \langle J^R, [g^{-1}\Delta g, g^{-1}\delta g]\rangle\,. \tag{2.47}$$

Megállapíthatjuk, hogy a jobbszorzás infinitezimális generátorára

$$X_{J^R_a} \;=\; gT_a \oplus [J^R, T_a]\,, \tag{2.48}$$

ami megegyezik a $J^R_a = \langle J^R, T_a\rangle$ hamiltoni vektormezőjével, ahol T_a a $\mathcal{G}$ bázisának egy eleme. Az előbbi állítást igazolja a

$$\Omega_{(g,J^R)}(\delta g \oplus \delta J^R, X_{J^R_a}) \;=\; \langle \delta J^R, T_a\rangle = (dJ^R_a)(\delta J^R) \tag{2.49}$$

[8]A felhasznált koadjungált pálya a következő halmaz $O := \mathcal{O}(-\mu) = \left\{\mathrm{Ad}^\sharp{}_g(-\mu) | g \in G\right\}$.

egyenlőség, ahol dJ^R_a a szokásos differenciál. Felhasználva (2.48)-at azonnal adódik az alábbi egyenlőség is

$$\Omega_{(g,J^R)}(X_{J^R_b}, X_{J^R_a}) \;=\; -\langle J^R, [T_a, T_b]\rangle\,. \tag{2.50}$$

Tekintsük egy $F \in C^\infty(G)$ függvény dF differenciálját. Legyen $\Delta g = gX \in T_gG$ egy érintő vektor, és definiáljuk az F függvény ∇F „gradiensét” a következőek szerint:

$$dF_g(\Delta g) = \frac{d}{dt}F(ge^{tX})\Big|_{t=0} = \langle \nabla F(g), X\rangle\,. \tag{2.51}$$

Vegyük észre, hogy az F függvény hamiltoni vektormezője

$$X_F = 0 \oplus (-\nabla F)\,. \tag{2.52}$$

Ezt igazolja az alábbi egyenlőség

$$\Omega_{(g,J^R)}(\delta g \oplus \delta J^R, X_F) = \langle \nabla F, g^{-1}\delta g\rangle = dF_g(\delta g)\,. \tag{2.53}$$

Tekintsük most például a $G := GL(n,\mathbb{C})$ valós Lie-csoportot és $\mathcal{G} = gl(n,\mathbb{C})$ Lie-algebráját az $\langle X, Y\rangle = \Re\,\mathrm{tr}(XY)\,,\ \forall X, Y \in \mathcal{G}$ invariáns skaláris szorzattal. Vezessük be az

$$f_{ij}(g) = \Re\,\mathrm{tr}(gE_{ji}) = \Re g_{ij} \quad \text{és} \quad l_{ij}(g) = \Re\,\mathrm{tr}(g(-\mathrm{i})E_{ji}) = \Im g_{ij}\,, \tag{2.54}$$

valós függvényeket, melyek gradiensei

$$\nabla f_{ij} = -E_{ji}g \quad \text{és} \quad \nabla l_{ij} = \mathrm{i}\,E_{ji}g\,. \tag{2.55}$$

Az E_{ij} azt az elemei mátrixot jelöli, melynek i, j eleme 1 a többi 0. Használjuk fel a (2.52) és (2.55) összefüggéseket, ahonnan a (2.54) függvényekhez tartozó hamiltoni vektormezők

$$X_{f_{ij}} = 0 \oplus -E_{ji}g \quad \text{és} \quad X_{l_{ij}} = 0 \oplus \mathrm{i}\,E_{ji}g. \tag{2.56}$$

A (2.50) szimplektikus forma és a (2.48 , 2.56) vektormezők konkrét alakját felhasználva a következő összefüggésekre jutunk:

$$\begin{aligned}
\Omega_{(g,J^R)}(\Delta g \oplus \Delta J^R, X_{f_{ij}}) &= \langle E_{ji}g, g^{-1}\Delta g\rangle && (2.57)\\
\Omega_{(g,J^R)}(X_{J^R_a}, X_{g_{ij}}) &= \langle E_{ji}g, T_a\rangle = \Re(gT_a)_{ij} && (2.58)\\
\Omega_{(g,J^R)}(\Delta g \oplus \Delta J^R, X_{l_{ij}}) &= \langle(-\mathrm{i})E_{ji}g, g^{-1}\delta g\rangle && (2.59)\\
\Omega_{(g,J^R)}(X_{J^R_a}, X_{l_{ij}}) &= \langle(-\mathrm{i})E_{ji}g, T_a\rangle = \Im(gT_a)_{ij} && (2.60)\\
\Omega_{(g,J^R)}(X_{f_{ij}}, X_{f_{kl}}) &= 0 && (2.61)\\
\Omega_{(g,J^R)}(X_{f_{ij}}, X_{l_{mn}}) &= 0 && (2.62)\\
\Omega_{(g,J^R)}(X_{l_{ij}}, X_{l_{mn}}) &= 0\,. && (2.63)
\end{aligned}$$

A (2.57-2.63) egyenleteket a (2.50)-hoz tartozó Poisson zárójel segítségével az alábbi kompaktabb alakban írhatjuk

$$\{g_{ij}, g_{kl}\} = 0\,, \quad \{g_{ij}, J^R_a\} = (gT_a)_{ij}\,, \quad \{J^R_a, J^R_b\} = -\langle J^R, [T_a, T_b]\rangle. \tag{2.64}$$

Ez a Poisson zárójel struktúra fontos szerepet játszik többek között a racionális Ruijsenaars–Schneider modell szuperintegrálhatóságával kapcsolatos számításainkban is. Megjegyezzük, hogy a (2.64) összefüggések az alfejezet elején tekintett általános esetben is igazak.

2.4. Első példa: racionális Calogero modell

A racionális Calogero modell egyenes mentén (egy térdimenzióban) mozgó egymással $1/r^2$ potenciállal kölcsönható részecskéket ír le. Az energiamegmaradás garantálja a modell esetében, hogy két részecske pozíciója nem eshet egybe. A modell szimmetria-redukciós levezetéséről Kazhdan, Kostant és Sternberg [32] munkájában is olvashatunk. Tekintsük most ennek rövid összefoglalását.

A racionális Calogero modell előáll Lie-algebrán történő szabad mozgás redukciójaként. A fázisterünk $\mathcal{P} = T^*\mathcal{G}$, ahol $\mathcal{G} = u(n)$. A $\mathcal{G}$ Lie-algebrát azonosítjuk duálisával, a $\langle \cdot, \cdot \rangle = -\operatorname{tr}(\cdot\cdot)$ pozitív definit invariáns skaláris szorzat segítségével.

A kiindulási fázistér tehát $T^*\mathcal{G} \cong T\mathcal{G} \cong \mathcal{G} \times \mathcal{G} = \{(x, y) : x, y \in \mathcal{G} \times \mathcal{G}\}$. Tekintsük a $(\mathcal{P} = T^*\mathcal{G}, \Omega, H)$ hamiltoni rendszert, ahol Ω a kanonikus szimplektikus forma,

$$\Omega(x, y) = -d \operatorname{tr}(y dx) \,, \tag{2.65}$$

és H a „szabad mozgáshoz” tartozó Hamilton-függvény,

$$H(x, y) = -\frac{1}{2} \operatorname{tr}(y^2) \,. \tag{2.66}$$

Tekintsük a $G = U(n)$ szimmetria csoport Ψ kanonikus hatását, amely $g \in G$ esetén

$$\Psi_g : (x, y) \mapsto \big(gxg^{-1}, gyg^{-1}\big) \tag{2.67}$$

módon hat a fázistéren. A hatáshoz tartozó momentum leképezés

$$\Phi(x, y) = [x, y]. \tag{2.68}$$

A hamiltoni rendszer redukcióját az eltolási trükk segítségével végezzük el. A redukcióhoz az $U(n)$ csoport $\mathcal{O} = \mathcal{O}_\kappa$ koadjungált pályáját használjuk fel. Ez a koadjungált pálya választás megtalálható a [32] cikkben is. A pálya elemeit az alábbi halmaz alkotja

$$\mathcal{O}_\kappa = \{\xi(v) \in su(n) \,|\, \exists v \in \mathbb{C}^n, \; v^\dagger v = n\kappa\} \,, \tag{2.69}$$

ahol $\xi(v) := \mathrm{i}(vv^\dagger - \frac{v^\dagger v}{n}\mathbf{1}_n)$ és κ pozitív valós paraméter.

A redukció elvégzése előtt tekintsük a

$$\mathcal{P}^{\mathrm{ext}} = \mathcal{P} \times \mathcal{O}_\kappa = \{(x, y, \xi) \,|x, y \in \mathcal{G}, \, \xi \in \mathcal{O}_\kappa\} \tag{2.70}$$

kiterjesztett fázisteret az

$$\Omega^{\mathrm{ext}} = \Omega + \Omega^{\mathcal{O}_\kappa} \tag{2.71}$$

szimplektikus formával és a

$$H^{\mathrm{ext}}\,(x, y, \xi) = H\,(x, y) \tag{2.72}$$

Hamilton-függvénnyel. Ekkor a hatás a kiterjesztett fázistéren $g \in G$ esetén

$$\Psi_g^{\mathrm{ext}} \,:\, (x, y, \xi) \mapsto (gxg^{-1}, gyg^{-1}, g\xi g^{-1}), \tag{2.73}$$

amihez a

$$\Phi^{\mathrm{ext}}(x, y, \xi) = \Phi(x, y) + \xi \tag{2.74}$$

kiterjesztett momentum leképezés tartozik. A redukciót a kiterjesztett momentum

$$\Phi^{\mathrm{ext}} := 0 \tag{2.75}$$

értékénél végezzük el. A momentum kényszer a következőképpen írható

$$[x, y] + \xi = 0\,. \tag{2.76}$$

Felhasználva a csoporthatást $\mathrm{i}\,x$ diagonalizálható $q^1 > q^2 > \cdots > q^n$ sajátértékekkel. Vezessük be a $q \equiv \mathrm{diag}(q^1, \ldots, q^n)$ azonosítást. Így bármely (x, y, ξ) elem áttranszformálható $(\mathrm{i}\,q, \mathrm{i}\,L, \xi(v))$ alakra a csoporthatás segítségével. Ekkor a (2.76) kényszer a

$$[q, L] = \xi(v) \tag{2.77}$$

egyenlettel ekvivalens. Bontsuk fel L-t $L_{\|}$ diagonális és $L_{\perp}$ off-diagonális elemek direkt összegére. A diagonális rész parametrizálható az $L_{\|} := \mathrm{diag}(p_1, \ldots, p_n)$ módon. Ennek megfelelően igaz az alábbi egyenlőség:

$$\left[q, L_{\|} + L_{\perp}\right] = \xi(v) \quad \Longrightarrow \quad [q, L_{\perp}] = \xi(v). \tag{2.78}$$

Azonnal leolvasható, hogy $\xi(v)$ egy olyan eleme a koadjungált pályának, amelynek diagonális része 0. Megvizsgálva $\xi(v)$ konkrét formáját látható, hogy v minden komponense egy egységnyi abszolútértékű komplex szám. Tovább faktorizálhatunk a maximális tórusz elemeivel, így elérhető, hogy $\xi(w)$ speciális alakra jussunk, ahol w vektor minden komponense 1 (ezzel teljes mértékrögzítést végzünk el). Ezután tekintve a (2.77) egyenlet off-diagonális részét

$$L_{jk} = p_j \delta_{jk} + \mathrm{i}\kappa\,(1 - \delta_{jk})\left(q^j - q^k\right)^{-1}, \quad j, k \in \{1, \ldots, n\}. \tag{2.79}$$

kifejezés adódik. Ez a racionális Calogero modell Lax mátrixa, q és p pedig a redukált fázistér változói. A redukció eredményéül kapott rendszer fázistere

$$\mathcal{P}_{\mathrm{red}} := T^*\mathcal{C}_n \simeq \mathcal{C}_n \times \mathbb{R}^n, \qquad \mathcal{C}_n := \{\, q \in \mathbb{R}^n \,|\, q^1 > q^2 > \cdots > q^n \,\}\,. \tag{2.80}$$

A redukált szimplektikus forma

$$\omega_{\mathrm{red}} = \mathrm{tr}\,(dL(q, p) \wedge dq) = \sum_j dp_j \wedge dq^j\,, \tag{2.81}$$

míg a redukált a Hamilton-függvény

$$H_{\mathrm{red}} = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left(L^2(q, p)\right) = \frac{1}{2}\sum_i p_i^2 + \frac{1}{2}\kappa^2 \sum_{j \neq k} \frac{1}{\left(q^j - q^k\right)^2}\,. \tag{2.82}$$

Tehát a fenti redukcióból kiadódott a racionális Calogero modell.

2.5. Második példa: hiperbolikus Sutherland és racionális Ruijsenaars–Schneider modellek

A továbbiakban két „duális" modell szimmetria-redukciós levezetését ismertetjük, amire később szükség lesz a szuperintegrálhatósággal és a dualitással foglalkozó fejezetekben. Mindkét modell egy térdimenzióban mozgó párkölcsönható részecskéket ír le. A hiperbolikus Sutherland modell Hamilton-függvénye:

$$H_{\text{hyp-Suth}}(q,p) \equiv \frac{1}{2}\sum_k p_k^2 + \frac{\kappa^2}{2}\sum_{j\neq k}\frac{1}{\sinh^2(q^j-q^k)}, \tag{2.83}$$

ahol a részecskék között fellépő kölcsönhatás taszító jellegű. A q^i koordináták ($i=1,\ldots,n$) felelnek meg a részecskepozícióknak. A racionális Ruijsenaars–Schneider modellt a

$$H_{\text{rat-RS}}(\hat{p},\hat{q}) \equiv \sum_k \cosh(2\hat{q}_k)\prod_{j\neq k}\left[1+\frac{4\kappa^2}{(\hat{p}^k-\hat{p}^j)^2}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{2.84}$$

Hamilton függvény írja le. Ez a modell a már megismert racionális Calogero modell relativisztikus általánosításának tekinthető. A részecskék pozíció változói a $\hat{p}^i$ koordináták. A fenti két modelltípusról bővebben olvashatunk Calogero [12] és Sutherland [51] művében valamint Ruijsenaars és Schneider [42] publikációjában.

Mindkét modell levezethető a $GL(n,\mathbb{C})$ valós Lie-csoport koérintő nyalábjának alkalmas szimplektikus redukciójával. Ennek tárgyalásához a [21] referenciára támaszkodunk.

Tekintsük a $\mathcal{G} := gl(n,\mathbb{C})$ valós Lie-algebrát a következő invariáns bilineáris formával

$$\langle X,Y\rangle := \Re\,\mathrm{tr}(XY) \qquad \forall X,Y\in\mathcal{G}. \tag{2.85}$$

A Lie-algebrát és duálisát a (2.85) forma segítségével azonosítjuk. A bal-trivializációt felhasználva a $G := GL(n,\mathbb{C})$ Lie-csoport koérintő nyalábjának egy modelljét kapjuk:

$$T^*G \simeq G\times\mathcal{G} = \{(g,J^R)\,|\,g\in G,\ J^R\in\mathcal{G}\}. \tag{2.86}$$

Továbbá ellátjuk a T^*G-n koérintő nyalábot a kanonikus szimplektikus formával:

$$\Omega = d\langle J^R, g^{-1}dg\rangle. \tag{2.87}$$

A későbbiek szempontjából hasznos bevezetni az

$$\mathcal{L}_1(g,J^R) := J^R \quad \text{és} \quad \mathcal{L}_2(g,J^R) := gg^\dagger \tag{2.88}$$

mátrix értékű függvényeket T^*G-n. A fenti mátrixokra „redukálatlan Lax mátrixként" gondolhatunk. Felhasználva (2.88) függvényeket bevezetjük a

$$H_j := \frac{1}{j}\Re\,\mathrm{tr}(\mathcal{L}_1^j), \qquad j=1,\ldots,n\,, \tag{2.89}$$

és a

$$\hat{H}_k := \frac{1}{2k}\,\mathrm{tr}(\mathcal{L}_2^k)\,, \qquad k=\pm1,\ldots,\pm n \tag{2.90}$$

függvényeket is. Mind $\{H_j\}$, mind $\{\hat{H}_k\}$ Poisson kommutáló rendszert alkotnak.

A T^*G fázistér szimplektikus redukcióját a

$$K := U(n) \times U(n) \tag{2.91}$$

csoport segítségével végezzük el, ahol a K csoport egy (η_L, η_R) $(\eta_{L,R} \in U(n))$ eleme a Ψ_{η_L,η_R} szimplektomorfizmussal hat:

$$\Psi_{\eta_L,\eta_R}(g, J^R) := (\eta_L g \eta_R^{-1}, \eta_R J^R \eta_R^{-1}). \tag{2.92}$$

A (2.92) hatást ekvivariáns momentum leképezés generálja. Mielőtt definiálnánk ezt a leképezést, jegyezzük meg, hogy minden $X \in \mathcal{G}$ előáll egyértelműen az alábbi módon:[9]

$$X = X_+ + X_- \quad \text{ahol} \quad X_+ \in u(n),\, X_- \in \mathrm{i}\, u(n), \tag{2.93}$$

azaz felbontjuk hermitikus és antihermitikus részre.

Így a momentum leképezés, $\Phi : T^*G \to u(n) \oplus u(n)$, a következő módon írható:

$$\Phi(g, J^R) = ((gJ^R g^{-1})_+, -J^R_+). \tag{2.94}$$

A H_j, $\hat{H}_k$ invariánsak a K csoport (2.92) hatására nézve. A $\{H_j\}$ és $\{\hat{H}_k\}$ függvények Poisson zárójelei túlélik a redukciót, így azok továbbra is Poisson kommutálni fognak.

Célunk leírni a (T^*G, Ω, H_j) és a $(T^*G, \Omega, \hat{H}_k)$ Hamilton-féle dinamikai rendszerekhez tartozó redukált rendszereket. Ehhez célszerű a már megismert eltolási trükköt alkalmazni. Ebben az esetben az

$$\mathcal{O}^L_\kappa := \{\mathrm{i}\,\kappa(vv^\dagger - \mathbf{1}_n) \,|\, v \in \mathbb{C}^n,\, |v|^2 = n\} \tag{2.95}$$

koadjungált pályát használjuk fel. A pályát a (2.40) szimplektikus formával látjuk el ($\Omega^{\mathcal{O}}$).

Tekintsük a kiterjesztett fázisteret

$$P^{\text{ext}} = T^*G \times \mathcal{O}^L_\kappa = \{(g, J^R, \xi)\} \tag{2.96}$$

és a hozzá tartozó szimplektikus formát

$$\Omega^{\text{ext}} = \Omega + \Omega^{\mathcal{O}^L_\kappa}. \tag{2.97}$$

Egy tetszőleges $\mathbf{X}$ vektormezőt P^{ext}-en az $\mathbf{X} = \Delta g \oplus \Delta J \oplus \Delta\xi$ alakban írhatunk, ahol $(g, J, \xi) \in P^{\text{ext}}$ és $\Delta g \in T_g G$, $\Delta J \in T_J\mathcal{G} \simeq \mathcal{G}$ és $\Delta\xi \in T_\xi \mathcal{O}^L_\kappa$. A teljesség kedvéért értékeljük ki a (2.97) szimplektikus formát $\mathbf{X}$ és $\mathbf{X}'$ vektorokon, ekkor

$$\Omega^{\text{ext}}(\mathbf{X}, \mathbf{X}') = \langle g^{-1}\Delta' g, \Delta J\rangle - \langle g^{-1}\Delta g, \Delta' J\rangle + \langle [g^{-1}\Delta' g, g^{-1}\Delta g], J\rangle - \langle \zeta, [D_\xi, D'_\xi]\rangle\,. \tag{2.98}$$

Itt felhasználtuk az következő konvenciót: $\Delta\xi = [D_\xi, \xi]$, $D_\xi \in u(n)$.

A K szimmetria csoport az alábbi módon hat a kiterjesztett fázistéren:

$$\Psi^{\text{ext}}_{\eta_L,\eta_R}(g, J^R, \xi) := (\eta_L g \eta_R^{-1}, \eta_R J^R \eta_R^{-1}, \eta_L \xi \eta_L^{-1}), \tag{2.99}$$

[9]Ez a $\mathcal{G}$ Lie-algebra Cartan felbontása, ahol a Cartan involúció egy X elemhez $-(X)^\dagger$-at rendeli.

és a kiterjesztett Φ^{ext} momentum leképezés a következő:

$$\Phi^{\text{ext}}(g, J^R, \xi) = ((gJ^Rg^{-1})_+ + \xi, -J^R_+). \tag{2.100}$$

A szimmetria redukciót a kiterjesztett momentum 0 értékénél hajtjuk végre. A leírni kívánt redukált fázistér

$$T^*G \times \mathcal{O}^L_\kappa //_0 K\,. \tag{2.101}$$

A $\Phi^{\text{ext}^{-1}}(0)$ kényszerfelület két globális szelésével foglalkozunk. Az egyik esetben olyan szelést keresünk, ahol a $g \in G$ Lie-csoport elemet hozzuk diagonális alakra, míg a másikban a $J^R \in \mathcal{G}$ Lie-algebra elemet (lásd (2.86)).

A (2.95) koadjungált pálya elemeire használva a

$$\xi(v) := \mathrm{i}\,\kappa(vv^\dagger - \mathbf{1}_n) \qquad \forall v \in \mathbb{C}^n\,, \quad \text{ahol} \quad |v|^2 = n, \tag{2.102}$$

jelölést, látható, hogy a K csoport hatására $\xi(v)$ az alábbi módon transzformálódik

$$\eta\xi(v)\eta^{-1} = \xi(\eta v) \qquad \forall \eta \in U(n). \tag{2.103}$$

Az $(\mathcal{O}^L_\kappa, \Omega^{\mathcal{O}^L_\kappa})$ azonosítható a $\mathbb{C}P_{n-1}$-nel, ahol a szimplektikus forma a [27] Fubini-Study metrikához tartozó Kähler-forma valós számszorosa ($\Omega^{\mathcal{O}^L_\kappa} \sim \mathrm{i}\,\kappa dv \wedge dv^\dagger$).

A kiterjesztett fázistéren a szokásos módon definiáljuk a

$$H^{\text{ext}}_j(g, J^R, \xi) := H_j(g, J^R) \qquad \text{és} \qquad \hat{H}^{\text{ext}}_k(g, J^R, \xi) := \hat{H}_k(g, J^R) \tag{2.104}$$

Hamilton-függvényeket.

Most térjünk át a redukált fázistér leírásához használt változók és függvények ismertetésére. A racionális Calogero modell esetéhez hasonlóan jelölje $\mathcal{C}_n$ a nyílt Weyl kamrát, amelyet a

$$\mathcal{C}_n := \{\, q \in \mathbb{R}^n \,|\, q^1 > q^2 > \cdots > q^n \,\}\,, \tag{2.105}$$

halmaz alkot. A $\mathcal{C}_n$ koérintő nyalábját

$$T^*\mathcal{C}_n \simeq \mathcal{C}_n \times \mathbb{R}^n = \{(q,p)|q \in \mathcal{C}_n\,, p \in \mathbb{R}^n\}\,, \tag{2.106}$$

ellátjuk a Darboux formával

$$\Omega_{T^*\mathcal{C}_n}(q,p) := \sum_k dp_k \wedge dq^k\,. \tag{2.107}$$

Továbbá rendeljük hozzá bármely $q \in \mathbb{R}^n$ vektorhoz a

$$\mathbf{q} := \mathrm{diag}(q^1, \ldots, q^n). \tag{2.108}$$

diagonális mátrixot. Mindkét modell fázistere $T^*\mathcal{C}_n$, de félreértés elkerülés végett a Sutherland esetben a kanonikus koordinátákra a (q,p), míg a Ruijsenaars esetben $(\hat{p}, \hat{q})$ jelölést használjuk.

Vezessük be az

$$L(q,p)_{jk} := p_j\delta_{jk} - \mathrm{i}(1-\delta_{jk})\frac{\kappa}{\sinh(q^j - q^k)} \tag{2.109}$$

mátrix értékű függvényt a fázistéren, ez a hiperbolikus Sutherland modell szokásos Lax mátrixa [36]. A κ^2 paraméter pozitív csatolási állandó. A modell (2.83) Hamilton-függvénye kifejezhető a (2.109) Lax mátrix segítségével

$$H_{\mathrm{hyp-Suth}}(q,p) = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(L^2(q,p)) = \frac{1}{2}\sum_{i=k}^{n} p_k^2 + \sum_{1\leq j<k\leq n} \frac{\kappa^2}{\sinh^2(q_j - q_k)}\,. \tag{2.110}$$

Definiáljuk továbbá az

$$\hat{L}(\hat{p},\hat{q})_{jk} = u_j(\hat{p},\hat{q}) \left[\frac{2\,\mathrm{i}\,\kappa}{2\,\mathrm{i}\,\kappa + (\hat{p}^j - \hat{p}^k)}\right] u_k(\hat{p},\hat{q}) \tag{2.111}$$

mátrixfüggvényt a fázistéren, ahol u_j az alábbi pozitív valós értékű függvényeket jelöli $T^*\mathcal{C}_n$-n:

$$u_j(\hat{p},\hat{q}) := e^{-\hat{q}_j} \prod_{m\neq j} \left[1 + \frac{4\kappa^2}{(\hat{p}^j - \hat{p}^m)^2}\right]^{\frac{1}{4}}. \tag{2.112}$$

A Cauchy determináns formula [54] felhasználásával látható, hogy $\hat{L}$ pozitív definit mátrix; így egyértelmű pozitív definit négyzetgyökkel rendelkezik. Az előbbiekben ismertetett $\hat{L}$ függvény a racionális Ruijsenaars–Schneider modell standard Lax mátrixa [44]. A modell (2.84) Hamilton-függvénye az alábbi módon adható meg a (2.111) Lax mátrix segítségével:

$$H_{\mathrm{rat-RS}}(\hat{p},\hat{q}) = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(\hat{L}(\hat{p},\hat{q}) + \hat{L}(\hat{p},\hat{q})^{-1})\,. \tag{2.113}$$

A kényszerfelület Sutherland modellhez tartozó szelését

$$S := \{\,(e^{\mathbf{q}}, L(q,p), \xi(w)) \,|\, (q,p) \in \mathcal{C}\times\mathbb{R}^n\,,\ w\in\mathbb{C}^n\} \tag{2.114}$$

definiálja, ahol w az a vektor $\mathbb{C}^n$-ben, melynek minden komponense 1. A K csoport minden pályája $(\Phi^{\mathrm{ext}})^{-1}(0)$-ben pontosan egyszer metszi S-t. Tekintsük az $\iota_S : S \to T^*G \times \mathcal{O}^L_\kappa$ természetes beágyazást. Ekkor

$$\iota_S^*(\Omega^{\mathrm{ext}}) = \sum_k dp_k \wedge dq^k. \tag{2.115}$$

Tehát az $(S, \sum_k dp_k \wedge dq^k) \simeq (T^*\mathcal{C}_n, \Omega_{T^*\mathcal{C}_n})$ szimplektikus sokaság egy modellje a (2.101) redukált fázistérnek.

A kényszerfelület Ruijsenaars modellhez tartozó szelését pedig

$$\hat{S} := \{\,(\hat{L}(\hat{p},\hat{q})^{\frac{1}{2}}, \hat{\mathbf{p}}, \xi(v(\hat{p},\hat{q})) \,|\, (\hat{p},\hat{q}) \in \mathcal{C}_n \times \mathbb{R}^n\,\} \tag{2.116}$$

definiálja, ahol $v(\hat{p},\hat{q})$ az alábbi n normájú vektort jelöli

$$v(\hat{p},\hat{q}) = \hat{L}^{-\frac{1}{2}}(\hat{p},\hat{q})u(\hat{p},\hat{q}). \tag{2.117}$$

Felhasználva az $\iota_{\hat{S}} : \hat{S} \to T^*G \times \mathcal{O}^L_\kappa$ tautologikus beágyazást belátható, hogy az

$$\iota_{\hat{S}}^*(\Omega^{\mathrm{ext}}) = \sum_k d\hat{q}_k \wedge d\hat{p}^k \tag{2.118}$$

egyenlőség teljesül. Így az $(\hat{S}, \sum_k d\hat{q}_k \wedge d\hat{p}^k) \simeq (T^*\mathcal{C}_n, \Omega_{T^*\mathcal{C}_n})$ szimplektikus sokaság egy modellje a (2.101) redukált fázistérnek.

A technikai részletekről a [6, 21] cikkekben olvashatunk bővebben. A [6] referenciában a redukált szimplektikus forma meghatározása a

$$\varphi_m(g, J, \xi) = \frac{1}{2m} \operatorname{tr}(J^m + (J^\dagger)^m), \qquad \psi_k(g, J, \xi) = \frac{1}{2} \operatorname{tr}((J^k + (J^\dagger)^k) g^\dagger Z(\xi) g), \tag{2.119}$$

függvényekhez tartozó hamiltoni vektormezők vizsgálatával történt, ahol

$$Z(\xi) := (\mathrm{i}\,\kappa)^{-1}\xi + \mathbf{1}_n, \qquad \forall \xi \in \mathcal{O}_\kappa^L. \tag{2.120}$$

A (2.119)-ben definiált függvényeket $m \geq 1$, $k \geq 0$ esetén értelmezzük. A megfelelő hamiltoni vektormezők pedig az alábbi módon adhatók meg

$$\mathbf{X}_{\varphi_m} = gJ^{m-1} \oplus 0 \oplus 0 \qquad \text{és} \qquad \mathbf{X}_{\psi_k} = \Delta g \oplus \Delta J \oplus \Delta \xi\,, \tag{2.121}$$

ahol

$$\Delta g = g \sum_{j=0}^{k-1} J^j g^\dagger Z(\xi) g J^{k-1-j}, \tag{2.122}$$

$$\Delta J = -(J^\dagger)^k g^\dagger Z(\xi) g - g^\dagger Z(\xi) g J^k, \tag{2.123}$$

$$\Delta \xi = \frac{1}{2\,\mathrm{i}\,\kappa}[g(J^k + (J^\dagger)^k)g^\dagger, \xi].$$

2.6. Tanulmányozni kívánt rendszerek

A későbbi fejezetekben a következő néhány modellel szeretnék foglalkozni:

- racionális Ruijsenaars–Schneider modell
- töltött részecskéket tartalmazó BC(n) Sutherland modell
- trigonometrikus Sutherland modell és duálisa.

A korábbi fejezetben már megismert (2.84) racionális Ruijsenaars–Schneider modell esetében főként a modell szuperintegrálhatóságára fókuszálok. Továbbá röviden bemutatom a modell egy általánosításánál a racionális $BC(n)$ van-Diejen modellnél is a szuperintegrálhatóságot.

Az első olyan Sutherland típusú modell, amely „pozitívan” és „negatívan töltött” részecskéket ír le Calogerotól ered [10]. Ezt úgy érte el, hogy az eredeti (2.83) n részecskés hiperbolikus modellben $m < n$ részecske koordinátáit $(\mathrm{i}\,\frac{\pi}{2})$-vel eltolta. Így az „ellentétesen töltött” részecskék között a $\sinh^{-2}(q_j - q_k)$ taszító potenciált $-\cosh^{-2}(q_j - q_k)$ vonzó potenciálra cserélte le. Később Olshanetsky és Rogov levezette ezt a modellt affin szimmetrikus terek redukciójából [38].

Az általunk vizsgált „töltött” részecskét tartalmazó $BC(n)$ Sutherland modellt a

$$H = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} p_j^2 - \sum_{1\le j\le m<k\le n} \left(\frac{\kappa^2}{\cosh^2(q_j - q_k)} + \frac{\kappa^2}{\cosh^2(q_j + q_k)}\right)$$
$$+ \sum_{1\le j<k\le m} \left(\frac{\kappa^2}{\sinh^2(q_j - q_k)} + \frac{\kappa^2}{\sinh^2(q_j + q_k)}\right) + \sum_{m<j<k\le n} \left(\frac{\kappa^2}{\sinh^2(q_j - q_k)} + \frac{\kappa^2}{\sinh^2(q_j + q_k)}\right)$$
$$+ \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \frac{(x-y)^2}{\sinh^2(2q_j)} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m} \frac{xy}{\sinh^2(q_j)} - \frac{1}{2}\sum_{j=m+1}^{n} \frac{xy}{\cosh^2(q_j)} \tag{2.124}$$

Hamilton-függvény jellemzi, ahol κ pozitív, x és y valós csatolási állandók. Követeljük meg a csatolási állandóktól, hogy kielégítik az $(x^2 - y^2) \neq 0$ összefüggést; valamint tegyük fel a koordinátákról, hogy az alábbi módon vannak rendezve

$$q_1 > q_2 > ... > q_m > 0 \quad \text{és} \qquad q_{m+1} > q_{m+2} > ... > q_n > 0\,. \tag{2.125}$$

Ekkor az energia megmaradásból már következik, hogy ez a rendezés nem változik meg. Továbbá, ha feltesszük, hogy az $xy > 0$ reláció is teljesül, akkor a (2.124) modell Hamilton-függvénye m „pozitívan” és $(n - m)$ „negatívan töltött” részecske valamint tükörtöltéseik és az origóba lerögzített „pozitív töltésű” részecske kölcsönhatását írja le.

A trigonometrikus Sutherland modell Hamilton-függvénye:

$$H_{\text{Suth}}(q,p) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} p_i^2 + \frac{1}{4}\sum_{1\le i<j\le n} \frac{x^2}{\sin^2\left(\frac{q_i - q_j}{2}\right)}, \tag{2.126}$$

ahol $x \neq 0$ tetszőleges valós csatolási állandó. Attól függően, hogy miképpen választjuk meg a pozíció változók értelmezési tartományát 3 különböző modellről beszélhetünk. Tekinthetünk a modell által leírt részecskékre n megkülönböztethetetlen részecskeként a körön, illetve megkülönböztethető részecskékként a körön vagy az egyenesen. Az említett konfigurációs tereknek a következő három halmaz felel meg

$$Q(n), \quad U(1) \times SQ(n), \quad \mathbb{R} \times SQ(n). \tag{2.127}$$

Itt $Q(n)$ felfogható a $Q(n) \equiv \mathbb{T}(n)^0/S(n)$ faktortérként, ahol $\mathbb{T}(n)^0$ az $U(n)$ maximális tóruszának reguláris része és az $S(n)$ permutációcsoport természetes hatását tekintjük; $SQ(n)$ definíciója hasonló, csak itt az $SU(n)$ csoport maximális tóruszának reguláris részét faktorizáljuk.

Ruijsenaars [42, 43, 44] cikksorozatában különböző Calogero típusú integrálható rendszerek kapcsolatait és dualitási relációit vizsgálta. A duális párok között létezik egy olyan szimplektomorfizmus, ami azonosítja az egyik rendszer hatás változóit a másik rendszer részecske koordinátáival és fordítva; ezt a transzformációt dualitási transzformációnak nevezzük.

A trigonometrikus Sutherland modellhez tartozó duális modell a komplex racionális Ruijsenaars-Schneider modell egy bizonyos valós formája [44]. A különböző (2.127) konfigurációs terekhez tartozó fázisterek a Sutherland modell esetében

$$P := T^*Q(n), \quad P_1 := T^*U(1) \times T^*SQ(n), \quad P_2 := T^*\mathbb{R} \times T^*SQ(n)\,. \tag{2.128}$$

A dualitási transzformáció révén adódó megfelelő fázisterek [20, 44] szerint

$$\hat{P}_c := \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C}^{\times}, \quad \hat{P}_1 := T^*U(1) \times \mathbb{C}^{n-1}, \quad \hat{P}_2 := T^*\mathbb{R} \times T^*SQ(n). \tag{2.129}$$

Érdemes megjegyezni, hogy a $\hat{P}_c$ fázistér rendelkezik egy nyílt sűrű részsokasággal, $\hat{P}$-al

$$\hat{P} = \mathbb{T}(n) \times \mathfrak{C}_x = \{(e^{\mathrm{i}\,\hat{q}}, \hat{p})\}, \quad \mathfrak{C}_x := \{\hat{p} \in \mathbb{R}^n | \hat{p}_i - \hat{p}_{i+1} > |x|,\, i = 1, \dots, n-1\}\,, \tag{2.130}$$

ami az $\hat{\omega} = \sum_i d\hat{p}_i \wedge d\hat{q}_i$ kanonikus szimplektikus formával és a

$$\hat{H}_{\mathrm{RS}}(\hat{q}, \hat{p}) = \sum_{a=1}^{n} (\cos \hat{q}_a) \prod_{k \neq a} \left[1 - \frac{x^2}{(\hat{p}_k - \hat{p}_a)^2}\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{2.131}$$

Hamilton-függvénnyel van ellátva. Ez a komplex racionális Ruijsenaars–Schneider modell Hamilton-függvényének egy valós formája.

A későbbiekben redukciós nézőpontból belátjuk, hogy a (2.126) és (2.131) modellek duális modelleknek tekinthetők, valamint megvizsgáljuk, hogy milyen kapcsolat van a (2.128) és (2.129) fázisterek között a dualitási transzformációk révén.

3. A racionális Ruijsenaars–Schneider modell szuperintegrálhatósága

Ebben a fejezetben fő célunk a (2.84) Hamilton-függvénnyel definiált racionális Ruijsenaars–Schneider modell (maximális) szuperintegrálhatóságának bemutatása. A szuperintegrálhatóság fogalmát a 2.2. alfejezetben ismertettük. A kötött mozgásokat leíró szuperintegrálható modellek nagyon ritkák, mivel ezekben a kötött pályák mind zártak. Azonban arra is érdemes rámutatni, hogy az aszimptotikusan szabad, szórási viselkedést mutató sokrészecske modellek esetében a szuperintegrálhatóság generikusan jellemző tulajdonság. Ez azért igaz, mert az ilyen modellek fázisterén gyakran bevezethetők olyan kanonikus koordináták, amelyekben a Hamilton-függvény szabad részecskés alakot ölt, ami természetesen szuperintegrálható is. Ezek a koordináták a részecskék aszimptotikus sebességeiből és azok kanonikus konjugáltjaiból állnak. Egy nem-triviális kérdés ezen változók globális símaságának bizonyítása. Erre a szokásos kinetikus energiát és párpotenciálokat tartalmazó modellek esetén léteznek általános eredmények [24], azonban az általunk itt tekintett racionális Ruijsenaars–Schneider modell Hamilton-függvénye nem ilyen alakú.

Explicit „extra mozgásállandók” keresése olyan modellek esetében is érdekes és fontos, amelyek szuperintegrálhatóságát valamilyen általános érv garantálja. A 3.1. alfejezetben, a [4] cikkünket követve, explicit konstrukcióval igazoljuk a racionális Ruijsenaars–Schneider modell szuperintegrálhatóságát. Ezután a 3.2. alfejezetben bemutatjuk, hogy az úgynevezett maximálisan nem-kompakt globális hatás-szög leképezést megengedő rendszerek, amely osztályhoz sok szórási probléma tartozik, mindig szuperintegrálhatóak. Az itt használt gondolatmenet, legalábbis lokális formában, megtalálható például Tsiganov [53] cikkében is. Ezt a gondolatmenetet alkalmazzuk a racionális Ruijsenaars–Schneider hatás-szög duálisát adó hiperbolikus Sutherland modell szuperintegrálhatóságának bizonyítására [6]. Végül Pusztai cikkére támaszkodva [41] röviden ismertetjük ezen duális pár $BC(n)$ általánosítását, amelynek szuperintegrálhatósága szintén könnyen látható az említett általános érvelésből.

3.1. Extra mozgásállandók explicit konstrukciója

Tekintsük az n részecskét leíró racionális Calogero modellt, melynek fázistere M ellátva a megfelelő kanonikus szimplektikus struktúrával. Megfontolásaink alapjául a Wojciechowski által [55] a racionális Calogero modell esetében megfigyelt következő Poisson zárójel reláció szolgál

$$\{I_k^1, I_j\}_M = jI_{j+k}\,. \tag{3.1}$$

Ezt a relációt

$$\{I_k^1, I_j^1\}_M = (j-k)I_{k+j}^1\,, \qquad \{I_k, I_j\}_M = 0 \tag{3.2}$$

egészíti ki. Tehát az I_j és I_k^1 függvények végtelen dimenziós Lie-algebrát alkotnak a Poisson zárójelre nézve. A racionális Calogero modell esetén a fenti relációkat kielégítő függvények

$$I_j = \mathrm{tr}(L^j) \quad \text{és} \quad I_k^1 = \mathrm{tr}(\mathbf{q}L^{k+1}), \tag{3.3}$$

ahol L a modell (2.79) Lax mátrixa és $\mathbf{q} = \mathrm{diag}(q^1, \dots, q^n)$.

Mivel az M fázistér véges dimenziós, $\dim(M) = 2n$, az I_j, I_k^1 függvényekből csak véges számú lehet független. Tegyük fel, hogy (3.1), (3.2) teljesül és a $2n$ darab függvényből álló alábbi halmaz független:

$$I_1, \dots, I_n, I_1^1, \dots, I_n^1. \tag{3.4}$$

Ezt a

$$J := \det \frac{\partial(I_1, \dots, I_n, I_1^1, \dots, I_n^1)}{\partial(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n)} \tag{3.5}$$

Jacobi determináns vizsgálatával dönthetjük el. A racionális Calogero modell esetében teljesül, hogy $J \neq 0$.

Amennyiben elfogadjuk a (3.1) összefüggést, azonnal látható, hogy tetszőleges $I = I(I_1, \dots, I_n)$ függvényre igaz, hogy $\{\{I_k^1, I\}_M, I\}_M = 0$. Továbbá elmondhatjuk, hogy az I hamiltoni folyamai mentén az I_k^1-k lineárisan változnak, azaz

$$I_k^1(q(t), p(t)) = I_k^1(q(0), p(0)) + t\{I_k^1, I\}_M(q(0), p(0)). \tag{3.6}$$

Ezzel a dinamika egy algebrai linearizációját nyertük. (Integrálható modellek algebrai linearizációjáról a [13, 14] cikkekben is olvashatunk.)

Folytassuk megfontolásainkat a következő kifejezés vizsgálatával:

$$I_j^1\{I_k^1, I\}_M - I_k^1\{I_j^1, I\}_M \,. \tag{3.7}$$

Könnyen látható, hogy ez a kifejezés Poisson kommutál I-vel. Tehát ezzel a konstrukcióval elő tudunk állítani tetszőleges I-hez az I_k-kon kívül újabb Poisson kommutáló függvényeket.

Mielőtt rátérnénk a racionális Ruijsennars-Schneider modell vizsgálatára először vizsgáljuk meg általános esetben az I_j-k szuperintegrálhatóságát. Ehhez tekintsük egy fix $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ esetén az alábbi függvényeket

$$C_{k,j} := I_k^1 I_{2j} - I_j^1 I_{k+j}, \qquad k \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{j\}. \tag{3.8}$$

Feltevéseink szerint a (3.4) egyenletben definiált $2n$ darab függvény lokálisan koordinátának tekinthető. Ekkor a

$$J_j := \det \frac{\partial(I_a, C_{b,j})}{\partial(I_\alpha, I_\beta^1)} \qquad a, \alpha \in \{1, \dots, n\},\ b, \beta \in \{1, \dots, n\} \setminus \{j\}, \tag{3.9}$$

Jacobi determináns kiszámítható, $J_j = (I_{2j})^{n-1}$, ami általában nem-eltűnő. Mivel az I_l és $C_{k,j}$ $(2n-1)$ funkcionálisan független függvény mind Poisson kommutál I_j-vel, ezért az I_j függvény maximálisan szuperintegrálható.

Most térjünk át a racionális Ruijsenaars modell vizsgálatára. Egyenlőre mellőzve a technikai részleteket közöljük, hogy az alábbi módon definiált

$$I_k(\hat{p}, \hat{q}) := \mathrm{tr}\left(\hat{L}(\hat{p}, \hat{q})^k\right), \quad I_k^1(\hat{p}, \hat{q}) := -\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left(\hat{\mathbf{p}}\hat{L}(\hat{p}, \hat{q})^k\right) \qquad \forall k \in \mathbb{Z} \tag{3.10}$$

függvények kielégítik az (3.1), (3.2) Poisson zárójel relációkat. Itt $\hat{L}$ a (2.111) racionális Ruijsenaars–Schneider Lax mátrixa és $\hat{\mathbf{p}} = \mathrm{diag}(\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_n)$. Esetünkben is belátható [4], hogy a

J (3.5) Jacobi determináns generikusan nem-eltűnő, tehát (3.4) most is független függvényeket tartalmaz.

Elevenítsük fel, hogy a modell Hamilton-függvénye az I_k függvények segítségével az alábbi módon fejezhető ki:

$$H_{\mathrm{rat-RS}} = \frac{1}{2}(I_1 + I_{-1}). \tag{3.11}$$

A (3.7) egyenletben tekintett módszer felhasználható az racionális Ruijsenaars–Schneider modell esetében is. Az $I := H_{\mathrm{rat-RS}}$ Hamilton-függvényre alkalmazva az említett eljárást és kiválasztva az egyik ilyen függvény családot extra mozgásállandóknak a

$$K_j := I_j^1(I_2 - n) - I_1^1(I_{j+1} - I_{j-1}), \qquad j = 2, \ldots, n \tag{3.12}$$

függvényeket vezetjük be. Most belátjuk az extra mozgásállandók függetlenségét. Ehhez kiszámítjuk a megfelelő Jacobi determinánst, amire

$$\det \frac{\partial(I_a, K_b)}{\partial(I_\alpha, I_\beta^1)} = (I_2 - n)^{n-1}, \qquad a, \alpha \in \{1, \ldots, n\},\, b, \beta \in \{2, \ldots, n\} \tag{3.13}$$

adódik. A (3.13) eredményéül kapott $(I_2 - n)^{n-1}$ kifejezés generikusan nem-eltűnő. Tehát a I_a, K_b függvények funkcionálisan függetlenek és Poisson kommutálnak $H_{\mathrm{rat-RS}}$-el, azaz beláttuk, hogy a Ruijsenaars–Schneider Hamilton-függvény szuperintegrálható.

A (3.1,3.2) összefüggések igazolását a racionális Ruijsenaars–Schneider modell esetén célszerű a modell szimmetria-redukciós tárgyalásából származó eredmények [21] felhasználásával elvégezni [4]. A kívánt összefüggések megkaphatók a modell dinamikai r-mátrixának használatával is, de ez utóbbi út lényegesen hosszadalmasabb. Ilyen számításokra láthatunk példát Aniceto, Avan és Jevicki [2] cikkében. Munkájukban felhasználják az

$$\hat{L}(\hat{p}, \hat{q}) = \sum_{k,j=1}^{n} \frac{\mathrm{i}\,\chi}{\hat{p}_k - \hat{p}_j + \mathrm{i}\,\chi} b_j\, E_{kj}\,, \quad b_k = e^{\hat{q}_k} \prod_{j \neq k} \left(1 + \frac{\chi^2}{(\hat{p}_k - \hat{p}_j)^2}\right)^{1/2} \tag{3.14}$$

alternatív, $\hat{L}$-al mérték-ekvivalens Lax mátrix r-mátrix struktúráját. Az $\hat{L}$ önmagával vett Poisson zárójeleire kvadratikus kifejezés teljesül,

$$\left\{\tilde{L}_1, \tilde{L}_2\right\} = a_{12}\tilde{L}_1\tilde{L}_2 - \tilde{L}_1\tilde{L}_2 d_{12} - \tilde{L}_1 s_{12}\tilde{L}_2 + \tilde{L}_2 s_{21}\tilde{L}_1\,, \tag{3.15}$$

ahol

$$\begin{aligned} d_{12} &= -a_{12}^{CM} - w, & a_{12} &= -a_{12}^{CM} - s_{12}^{CM} + s_{21}^{CM} + w, \\ s_{21} &= s_{12}^{CM} - w, & s_{12} &= s_{21}^{CM} + w, \end{aligned} \tag{3.16}$$

és

$$\begin{aligned} a_{12}^{CM} &= -\sum_{k \neq j} \frac{1}{\hat{p}_j - \hat{p}_k} E_{jk} \otimes E_{kj}\,, \\ s_{12}^{CM} &= \sum_{k \neq j} \frac{1}{\hat{p}_j - \hat{p}_k} E_{jk} \otimes E_{kk}\,. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Térjünk vissza a modell hamiltoni redukciós tárgyalásához és jegyezzük meg, hogy a kiterjesztett (2.96) fázistér (2.97) szimplektikus formájához a

$$\{g, \langle X, J^R\rangle\} = gX\,, \quad \{\langle X, J^R\rangle, \langle Y, J^R\rangle\} = -\langle [X,Y], J^R\rangle\,, \quad \{\langle X_+, \xi\rangle, \langle Y, \xi\rangle\} = \langle [X_+, Y_+], \xi\rangle \tag{3.18}$$

Poisson zárójelek tartoznak. Idézzük fel azt is, hogy $\hat{S}$ (2.116) révén azonosítható a racionális Ruijsenaars–Schneider modell fázistere a $\mathcal{P}^{\mathrm{ext}} = G \times \mathcal{G} \times \mathcal{O}^L_\kappa$-ből adódó redukált fázistérrel. Elevenítsük fel, hogy $\hat{S} := \{\, (\hat{L}(\hat{p},\hat{q})^{\frac{1}{2}}, \hat{\mathbf{p}}, \xi(v(\hat{p},\hat{q})) \,|\, (\hat{p},\hat{q}) \in \mathcal{C}_n \times \mathbb{R}^n \,\}$.

Gondolatmenetünk azon a Marsden–Weinstein redukciónál megismert tényen alapszik, hogy az invariáns függvények Poisson zárójelei túlélik a redukciót. Esetünkben az I_k, I^1_k függvények a redukált fázistéren felfoghatók az

$$\mathcal{I}_k = \mathrm{tr}\left((g^\dagger g)^k\right), \qquad \mathcal{I}^1_k = -\frac{1}{2}\Re\,\mathrm{tr}\left((g^\dagger g)^k J^R\right) \tag{3.19}$$

invariáns függvények megszorításaiként $\hat{S}$-re. Ezen $\mathcal{I}^1_k$ és $\mathcal{I}_j$ függvényekre a tr ciklikussága, valamint (2.85) és (3.18) alapján az alábbi ekvivalens relációk teljesülnek:

$$\begin{aligned}
\{\mathcal{I}^1_k, \mathcal{I}_j\} &= -\frac{1}{2}\left\{J^R_a, \mathrm{tr}((g^\dagger g)^j)\right\}\left[\Re\ \mathrm{tr}((g^\dagger g)^k T^a)\right] \\
&= \frac{j}{2}\ \mathrm{tr}\left(\left\{(g^\dagger g), J^R_a\right\}((g^\dagger g)^{j-1}\right)\left[\Re\ \mathrm{tr}\left((g^\dagger g)^k T^a\right)\right] \\
&= \frac{j}{2}\,\mathrm{tr}\left((g^\dagger g)^j\left(T_a + {T_a}^\dagger\right)\right)\left[\Re\ \mathrm{tr}\left((g^\dagger g)^k T^a\right)\right] = j\ \mathrm{tr}\left((g^\dagger g)^{k+j}\right) = j\mathcal{I}_{k+l}.
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Itt $J^R_a := \langle J^R, T_a\rangle$, T_a és T^a a $gl(n,\mathbb{C})$ Lie-algebra egymásnak duális bázisai, továbbá az ismételt indexekre az összegzési konvenció érvényes. A számításaink során figyelembe vettük, hogy $g^\dagger g$ hermitikus, ami a Cartan felbontásnál bevezetett (2.93) jelölés segítségével $(g^\dagger g)_+ = 0$ alakban írható. Hasonló módon megvizsgálhatjuk a $\mathcal{I}^1_k$ és $\mathcal{I}^1_j$ függvényeket Poisson zárójeleit is. Azt találjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\{\mathcal{I}^1_k, \mathcal{I}^1_j\} &= \frac{1}{4}\left\{\mathrm{tr}[J^R_-(g^\dagger g)^k], \mathrm{tr}[J^R_-(g^\dagger g)^j]\right\} = \frac{1}{4}\{J^R_a, J^R_b\}\,\mathrm{tr}[T^a_-(g^\dagger g)^k]\,\mathrm{tr}[T^b_-(g^\dagger g)^j] \\
&\quad + \frac{1}{4}\,\mathrm{tr}[T^a(g^\dagger g)^k]\,\mathrm{tr}[J^R_-\{J^R_a, (g^\dagger g)^j\}] + \frac{1}{4}\,\mathrm{tr}[J^R_-\{J^R_a, (g^\dagger g)^k\}]\,\mathrm{tr}[T^a(g^\dagger g)^l] \\
&= 0 + j\mathcal{I}^1_{k+j} - k\mathcal{I}^1_{k+j} = (j-k)\mathcal{I}^1_{k+j}.
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Tehát a (3.18) Poisson zárójel relációk felhasználásával beláttuk, hogy (3.19) függvények az alábbi relációkat elégítik ki:

$$\{\mathcal{I}_j, \mathcal{I}_k\} = 0\,, \quad \{\mathcal{I}^1_k, \mathcal{I}_j\} = j\mathcal{I}_{j+k}\,, \quad \{\mathcal{I}^1_k, \mathcal{I}^1_j\} = (j-k)\mathcal{I}^1_{j+k}\,. \tag{3.22}$$

Ezen a relációk egyértelmű következményeként adódnak a redukált fázistéren értelmezett I_j, I^1_k függvények

$$\{I_j, I_k\} = 0\,, \quad \{I^1_k, I_j\} = j I_{j+k}\,, \quad \{I^1_k, I^1_j\} = (j-k) I^1_{j+k} \tag{3.23}$$

Poisson zárójel relációi. Ezzel beláttuk a (3.1) és (3.2) relációkat.

Összefoglalva, megmutattuk, hogy a racionális Ruijsenaars–Schneider modellben realizálható a (3.1, 3.2) végtelen dimenziós Lie-algebra, amely lehetővé teszi extra mozgásállandók explicit előállítását és így garantálja a modell szuperintegrálhatóságát.

3.2. Nem-kompakt hatás-szög változók és szuperintegrálhatóság

Tekintsünk egy Liouville integrálható (M, ω, H) hamiltoni rendszert a $h_i \in C^\infty(M)$, $i = 1, \ldots, n$ független és Poisson kommutáló mozgásállandókkal. Továbbá tételezzük fel, hogy létezik maximálisan nem-kompakt típusú globálisan definiált „hatás-szög transzformáció”. Ezen azt értjük, hogy létezik egy (M, ω)-val szimplektomorf $(\hat{M}, \hat{\omega})$ szimplektikus sokaság, ahol

$$\hat{M} = \mathcal{C}_n \times \mathbb{R}^n = \{(\hat{p}, \hat{q}) \,|\, \hat{p} \in \mathcal{C}_n,\, \hat{q} \in \mathbb{R}^n\}, \tag{3.24}$$

$\mathcal{C}_n$ a (2.80) „nyílt Weyl kamra” $\mathbb{R}^n$-ben, és

$$\hat{\omega} = \sum_{i=1}^{n} d\hat{q}_i \wedge d\hat{p}_i \tag{3.25}$$

a kanonikus szimplektikus forma. Ez a szimplektomorfizmus lehetővé teszi, hogy kifejezzük h_i függvényeket a $\hat{p}_j$ hatásváltozók segítségével. Precízebben megfogalmazva azt feltételezzük, hogy létezik egy

$$A : M \to \hat{M} \tag{3.26}$$

szimplektomorfizmus, amelyre $h_i \circ A^{-1}$ nem függ $\hat{q}$-tól és az

$$X_{i,j}(\hat{p}) := \frac{\partial h_i \circ A^{-1}}{\partial \hat{p}_j} \tag{3.27}$$

mátrix invertálható minden $\hat{p} \in \mathcal{C}_n$ pontban. Ezt a leképezést maximálisan *nem-kompakt típusú globális hatás-szög leképezésnek* nevezzük, míg $(\hat{M}, \hat{\omega})$-t az (M, ω, H)-hoz tartozó hatás-szög fázistérnek.

A fent ismertetett tulajdonságokkal bíró A leképezést használva tekintsük az $f_i \in C^\infty(M)$ $(i = 1, \ldots, n)$ függvényeket az alábbi definíció szerint:

$$(f_i \circ A^{-1})(\hat{p}, \hat{q}) := \sum_{j=1}^{n} \hat{q}_j X(\hat{p})^{-1}_{j,i}\,, \qquad \text{ahol} \qquad \sum_{j=1}^{n} X(\hat{p})_{i,j} X(\hat{p})^{-1}_{j,k} = \delta_{i,k}. \tag{3.28}$$

Használjuk fel, hogy A szimplektomorfizmus. Így a következő összefüggésekre jutunk:

$$\{h_i, f_j\}_M = \delta_{i,j} \qquad \text{és} \qquad \{f_i, f_j\}_M = 0\,. \tag{3.29}$$

Felhasználva, hogy A szimplektomorfizmus azonnal adódik az

$$\{h_i \circ A^{-1}, f_j \circ A^{-1}\}_{\hat{M}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial h_i \circ A^{-1}}{\partial \hat{p}_k} \frac{\partial f_j \circ A^{-1}}{\partial \hat{q}_k} = \{h_i, f_j\}_M \circ A^{-1} \tag{3.30}$$

egyenlőség. Ez igazolja a (3.29) összefüggés első részét, a második rész hasonlóan belátható. A $\{h_i, h_j\}_M$-k eltűnéséből és a (3.29) összefüggésből már következik, hogy a $h_1, \ldots, h_n, f_1, \ldots, f_n$ függvények funkcionálisan függetlenek M minden pontjában. A $h_1, \ldots, h_n, f_1, \ldots, f_{n-1}$ függvények Poisson kommutálnak h_n-nel.

A hiperbolikus Sutherland és racionális Ruijsenaar-Schneider modell tárgyalásánál ismertetett szimmetria-redukciós kép felhasználásával belátható ezen modellek szuperintegrálhatósága. Az 1.5 alfejezetben leírtuk a következő ekvivalencia relációkat:

$$(M,\omega) \longleftrightarrow (S,\iota_S^*(\Omega^{\mathrm{ext}})) \longleftrightarrow (P^{\mathrm{red}},\Omega^{\mathrm{red}}) \longleftrightarrow (\hat{S},\iota_{\hat{S}}^*(\Omega^{\mathrm{ext}})) \longleftrightarrow (\hat{M},\hat{\omega}). \tag{3.31}$$

A (3.31) leképezések kompozíciójával az $A : M \to \hat{M}$, $A^*(\hat{\omega}) = \omega$ szimplektomorfizmushoz jutunk. A megismert geometriai képnek köszönhetően az

$$A : (q,p) \mapsto (\hat{p},\hat{q}) \tag{3.32}$$

leképezést az alábbi egyenlet definiálja

$$(\hat{L}(\hat{p},\hat{q})^{\frac{1}{2}}, \hat{\mathbf{p}}, \zeta(v(\hat{p},\hat{q}))) = (\eta(q,p)e^{\mathbf{q}}\eta(q,p)^{-1}, \eta(q,p)L(q,p)\eta(q,p)^{-1}, \eta(q,p)\zeta(v_0)\eta(q,p)^{-1}), \tag{3.33}$$

ahol $\eta(q,p)$ skaláris szorzótól eltekintve egyértelműen meghatározott $n \times n$ unitér mátrix.

Felhasználva a szimmetria-redukciós képet belátható, hogy a következő állítások érvényesek:

- A Ruijsenaars–Schneider modell $\hat{p}_i$ részecske pozícióit az A leképezés átviszi a $\hat{p}_i \circ A$ Sutherland hatás változókba (ezek az $L(q,p)$ Lax mátrix sajátértékei), és hasonló módon a $\hat{q}_i$ kanonikus impulzusokat áttranszformálja a megfelelő $\hat{q}_i \circ A$ nem-kompakt szögváltozókba . A fentieket összefoglalva azt mondhatjuk, hogy a Ruijsenaars–Schneider modell pozíció változói és a hozzá kanonikusan konjugált impulzusok játszák a Sutherland modell esetében a hatásváltozók és a hozzájuk konjugált szögváltozók szerepét.
- Mivel az $e^{2q_i} \circ A^{-1}$ függvények az $\hat{L}$ Lax-mátrix rendezett sajátértékei $\hat{M}$-en, ezért látható, hogy a q_i Sutherland részecske pozíciókat A^{-1} átviszi a $q_i \circ A^{-1}$ Ruijsenaars hatásváltozókba és a p_i kanonikus impulzusokat a $p_i \circ A^{-1}$ Ruijsenaars (nem-kompakt) szögváltozókba. Az imént elmondottak szerint a Sutherland részecske pozíció változók és konjugáltjaik adják a Ruijsenaars modell hatás- és szögváltozóit.
- Az A és A^{-1} maximálisan nem-kompakt globális hatás-szög leképezések.

Az A harmadik tulajdonságának belátásához tekintsük a h_k kommutáló Hamilton-függvényeket (2.89). Az $\hat{M}$ szög-hatás fázistéren kifejezve az alábbi alakot öltik

$$(h_k \circ A^{-1})(\hat{p},\hat{q}) = \sum_{l=1}^{n} \hat{p}_l^k. \tag{3.34}$$

A Vandermonde determináns formula [54] segítségével könnyen belátható a következő egyenlőség

$$\det\left(\frac{\partial h_k \circ A^{-1}}{\partial \hat{p}_j}\right) = n! \prod_{1 \le i < j \le n} (\hat{p}_j - \hat{p}_i). \tag{3.35}$$

A (3.35) kifejezés sosem tűnik el $\mathcal{C}_n$-n. Hasonlóan megvizsgálva A-t az alábbi egyenlőségre jutunk

$$(\hat{h}_k \circ A)(q,p) = \sum_{l=1}^{n} e^{2kq_l}, \qquad \forall k = 1,\dots,n. \tag{3.36}$$

Az itt fellépő $\det\left(\frac{\partial \hat{h}_k \circ A}{\partial q_j}\right)$ Jacobi determináns sem tűnik el a $\mathcal{C}_n$ Weyl-kamrán.

Hatás-szög dualitásnak nevezzük azt a tényt, hogy $A : M \to \hat{M}$ hatás-szög leképezés az (M, ω, H) Sutherland modell szempontjából és $A^{-1} : \hat{M} \to M$ hatás-szög leképezés az $(\hat{M}, \hat{\omega}, \hat{H})$ Ruijsenaars–Schneider modell nézőpontjából [42]. Konkrétan, mindkét rendszer duálisának hatás-szög fázisterén él és pozíció változóik a duális rendszer hatásváltozói; a kapcsolatot a hatás-szög leképezés valósítja meg.

A fejezet elején ismertetett maximálisan nem-kompakt típusú globális hatás-szög változókat felhasználó gondolatmenetből így már azonnal következik a $h_1, \ldots, h_n$ függvények szuperintegrálhatósága. Például a $H = \frac{1}{2}h_2$ Sutherland Hamilton-függvény is maximálisan szuperintegrálható. Belátható a $\hat{h}_k$ $(k = 1, \ldots, n)$ és a racionális Ruijsenaars–Schneider modell $\hat{H}$ Hamilton-függvényének szuperintegrálhatósága is. A $\hat{H} = \frac{1}{2}(\hat{h}_1 + \hat{h}_{-1})$ Hamilton-függvény ezen tulajdonsága már következménye $\hat{h}_1, \ldots, \hat{h}_n$ szuperintegrálhatóságának, hiszen kifejezhető polinomként $\hat{h}_1, \ldots, \hat{h}_n$ segítségével.

A maximálisan nem-kompakt típusú globális hatás-szög transzformáció használatával más Liouville integrálható rendszerek szuperintegrálhatósága is belátható. Igen hasonló gondolatmenet alkalmazható például a Sutherland és Ruijsenaars–Schneider modellek $BC(n)$ általánosítására. Ezt a két rendszert a

$$\begin{aligned} H_{BC}(q,p) = \frac{1}{2}\sum_{c=1}^{n} p_c^2 + \sum_{1\le a<b\le n}\left(\frac{g^2}{\sinh^2(q_a-q_b)} + \frac{g^2}{\sinh^2(q_a+q_b)}\right) \\ + \sum_{c=1}^{n}\left(\frac{g_1^2}{\sinh^2 q_c} + \frac{g_2^2}{\sinh^2(2q_c)}\right) \end{aligned} \tag{3.37}$$

és a

$$\begin{aligned} \hat{H}_{BC}(\hat{p},\hat{q}) = \sum_{c=1}^{n}(\cosh 2\hat{q}_c)\left[1+\frac{\nu^2}{\hat{p}_c^2}\right]^{\frac{1}{2}}\left[1+\frac{\chi^2}{\hat{p}_c^2}\right]^{\frac{1}{2}}\prod_{\substack{d=1\\(d\neq c)}}^{n}\left[1+\frac{4\mu^2}{(\hat{p}_c-\hat{p}_d)^2}\right]^{\frac{1}{2}}\left[1+\frac{4\mu^2}{(\hat{p}_c+\hat{p}_d)^2}\right]^{\frac{1}{2}} \\ + \frac{\nu\chi}{4\mu^2}\prod_{c=1}^{n}\left(1+\frac{4\mu^2}{\hat{p}_c^2}\right) - \frac{\nu\chi}{4\mu^2} \end{aligned} \tag{3.38}$$

Hamilton-függvények írják le. A (3.37) $BC(n)$ Sutherland modellt Olshanetsky és Perelomov vezette be [37]. A (3.38) $BC(n)$ Ruijsenaars modell van Diejen nevéhez fűződik [15]. Pusztai [41] munkájában szimplektikus-redukciós módszer használatával belátta a két modell hatás-szög dualitását. A dualitás a csatolási állandók közti

$$g^2 = \mu^2, \qquad g_1^2 = \frac{1}{2}\nu\chi, \qquad g_2^2 = \frac{1}{2}(\nu-\chi)^2 \tag{3.39}$$

kapcsolat esetén érvényes. A fentiekben feltételeztük, hogy $\mu^2 > 0$, $\nu > 0$ és $\chi \geq 0$. A dualitást jellemző szimplektomorfizmus geometriája nagyon hasonló a korábban ismertetett A_{n-1} esetben érvényeshez.

4. Egy integrálható $BC(n)$ Sutherland modell

Ebben a fejezetben szimmetria-redukciós nézőpontból vizsgáljuk az n „töltött” részecskét tartalmazó $BC(n)$ Sutherland modellt. Az itt tárgyalt levezetés [23] általánosításának tekinthető. Elevenítsük fel, hogy a két típusú részecskét tartalmazó $BC(n)$ Sutherland modell Hamilton-függvénye

$$\begin{aligned} H = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} p_j^2 - \sum_{1\leq j\leq m<k\leq n} \left(\frac{\kappa^2}{\cosh^2(q_j - q_k)} + \frac{\kappa^2}{\cosh^2(q_j + q_k)}\right) \\ + \sum_{1\leq j<k\leq m} \left(\frac{\kappa^2}{\sinh^2(q_j - q_k)} + \frac{\kappa^2}{\sinh^2(q_j + q_k)}\right) + \sum_{m<j<k\leq n} \left(\frac{\kappa^2}{\sinh^2(q_j - q_k)} + \frac{\kappa^2}{\sinh^2(q_j + q_k)}\right) \\ + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \frac{(x-y)^2}{\sinh^2(2q_j)} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m} \frac{xy}{\sinh^2(q_j)} - \frac{1}{2}\sum_{j=m+1}^{n} \frac{xy}{\cosh^2(q_j)}, \end{aligned} \tag{4.1}$$

ahol $\kappa > 0$, x és y valós csatolási állandók ($xy > 0$). Amennyiben $(x - y)^2 \neq 0$, az energia megmaradása már garantálja, hogy az időfejlődés során nem változik az azonos típusú részecskék sorrendje. Az $1, \ldots, m$ illetve $m + 1, \ldots, n$ indexeket hordozó azonos típusú részecskék között taszító, míg a különböző típusúak között vonzó kölcsönhatás lép fel. A részecskék kölcsönhatnak tükörtöltéseikkel és az origóban fixált töltéssel is. A rendszer vizsgálatánál a pozitív félegyenesre szorítkozhatunk.

A szimmetria-redukciós nézőpont előnye, hogy a modell Liouville integrálhatósága azonnal adódik és egy algebrai megoldási algoritmussal is felruház minket. A modell tárgyalását [5] alapján ismertetjük. Először áttekintjük a szükséges csoportelméleti ismereteket, majd rátérünk a redukciós levezetésre, végül a megoldási algoritmus tárgyalásával zárjuk a fejezetet.

4.1. Csoportelméleti háttér

Vegyük az m és n egész számokat, melyekre teljesül az

$$1 \leq m < n \tag{4.2}$$

reláció és definiáljuk a

$$Q_{n,n} := \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1}_n \\ \mathbf{1}_n & 0 \end{bmatrix} \in gl(2n, \mathbb{C}), \quad I_m := \mathrm{diag}(\mathbf{1}_m, -\mathbf{1}_{n-m}) \in gl(n, \mathbb{C}), \tag{4.3}$$

mátrixokat, ahol $\mathbf{1}_n$ az $n \times n$-es egységmátrixot jelöli. Bevezetjük továbbá az alábbi $2n \times 2n$-es mátrixot

$$D_m := \mathrm{diag}(I_m, I_m) = \mathrm{diag}(\mathbf{1}_m, -\mathbf{1}_{n-m}, \mathbf{1}_m, -\mathbf{1}_{n-m}) \in gl(2n, \mathbb{C}). \tag{4.4}$$

A következőkben a $G := SU(n,n)$ Lie-csoporttal és annak $\mathcal{G} := su(n,n)$ Lie-algebrájával foglalkozunk. Konvencióink szerint

$$SU(n,n) = \{g \in SL(2n,\mathbb{C}) \,|\, g^\dagger Q_{n,n} g = Q_{n,n}\} \tag{4.5}$$

és

$$su(n,n) = \{V \in sl(2n,\mathbb{C}) \,|\, V^\dagger Q_{n,n} + Q_{n,n} V = 0\}. \tag{4.6}$$

Könnyen látható (4.6) vizsgálatával, valamint $n \times n$-es blokkos jelölés használatával, hogy egy tetszőleges $V \in su(n,n)$ az alábbi alakban írható

$$V = \begin{bmatrix} X & Y \\ Z & -X^\dagger \end{bmatrix}, \quad Y^\dagger = -Y, \quad Z^\dagger = -Z, \quad \Im(\mathrm{tr}(X)) = 0. \tag{4.7}$$

Tekintsük $SU(n,n)$-en a Θ Cartan involúciót, és a Θ-val kommutáló Γ involúciót:

$$\Theta(g) := (g^\dagger)^{-1}, \qquad \Gamma(g) := D_m \Theta(g) D_m, \qquad \forall g \in G. \tag{4.8}$$

A Θ fixpont csoportját G_+-al, Γ fixpont csoportját G^+-al jelöljük. Megjegyezzük, hogy G_+ a G csoport maximális kompakt részcsoportja. Jelölje θ és γ a $\mathcal{G} = su(n,n)$ Lie-algebrán (4.8) által indukált involúciókat. Alkalmazva az $n \times n$-es blokkos jelölést a G_+ csoport $\mathcal{G}_+$ Lie-algebrája az alábbi módon parametrizálható

$$\mathcal{G}_+ = \left\{ \begin{bmatrix} X & Y \\ Y & X \end{bmatrix} : \ X^\dagger = -X, \ Y^\dagger = -Y, \ \mathrm{tr}(X) = 0 \right\}, \tag{4.9}$$

és izomorf $s(u(n) \oplus u(n))$-nel a következő leképezés révén

$$s(u(n) \oplus u(n)) \ni \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \mapsto \psi(\alpha,\beta) := \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \alpha+\beta & \alpha-\beta \\ \alpha-\beta & \alpha+\beta \end{bmatrix} \in \mathcal{G}_+. \tag{4.10}$$

A (4.10) összefüggés felhasználásával belátható, hogy a G_+ részcsoport izomorf az $S(U(n) \times U(n))$ csoporttal. Kapcsolatukat az alábbi egyenlőség jellemzi

$$S(U(n) \times U(n)) \ni \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \mapsto g(a,b) := \frac{1}{2} \begin{bmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{bmatrix} \in G_+, \tag{4.11}$$

amit tömörebben a következő módon írhatunk

$$g(a,b) = K(\mathrm{diag}(a,b))K^{-1}, \quad \text{ahol} \quad K := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \mathbf{1}_n & \mathbf{1}_n \\ \mathbf{1}_n & -\mathbf{1}_n \end{bmatrix}. \tag{4.12}$$

A G^+ csoport $\mathcal{G}^+$ Lie-algebráját a

$$\mathcal{G}^+ = \left\{ \begin{bmatrix} X & Y \\ I_m Y I_m & I_m X I_m \end{bmatrix} : \ X^\dagger = -I_m X I_m, \ Y^\dagger = -Y, \ \mathrm{tr}(X) = 0 \right\}, \tag{4.13}$$

alakban írható elemek alkotják és izomorf az $s(u(m,n-m) \oplus u(m,n-m))$ Lie-algebrával az alábbi leképezés révén:

$$s(u(m,n-m) \oplus u(m,n-m)) \ni \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \mapsto \chi(\alpha,\beta) := \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \alpha+\beta & (\alpha-\beta)I_m \\ I_m(\alpha-\beta) & I_m(\alpha+\beta)I_m \end{bmatrix} \in \mathcal{G}^+. \tag{4.14}$$

A fenti összefüggésben $u(m,n-m)$-et az

$$\alpha^\dagger I_m + I_m\alpha = 0 \tag{4.15}$$

$n\times n$-es mátrixok Lie-algebrájaként realizáljuk, és fennáll a

$$\chi(\alpha,\beta) = \tilde{K}(\mathrm{diag}(\alpha,\beta))\tilde{K}^{-1}\,, \qquad \tilde{K} := \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} \mathbf{1}_n & \mathbf{1}_n \\ I_m & -I_m \end{bmatrix}, \tag{4.16}$$

összefüggés is. A G_+-hoz hasonló gondolatmenetet követve belátható az is, hogy G^+ izomorf az $S(U(m,n-m)\times U(m,n-m))$ csoporttal.

A θ illetve γ involúciók (-1) sajátértékhez tartozó $\mathcal{G}_-$ illetve $\mathcal{G}^-$ saját alterei az alábbi alakban írhatók,

$$\mathcal{G}_- = \left\{\begin{bmatrix} X & Y \\ -Y & -X \end{bmatrix}:\ X^\dagger = X,\ Y^\dagger = -Y\right\} \tag{4.17}$$

és

$$\mathcal{G}^- = \left\{\begin{bmatrix} X & Y \\ -I_mYI_m & -I_mXI_m \end{bmatrix}:\ X^\dagger = I_mXI_m,\ Y^\dagger = -Y\right\}. \tag{4.18}$$

Vezessük be a $\mathcal{G}_s^r := \mathcal{G}_s\cap\mathcal{G}^r$ jelölést tetszőleges $s,r\in\{\pm\}$ előjelekre és bontsuk fel $\mathcal{G}$-t diszjunkt alterek direkt összegére,

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_-^- \oplus \mathcal{G}_-^+ \oplus \mathcal{G}_+^- \oplus \mathcal{G}_+^+\,. \tag{4.19}$$

A felbontásban szereplő alterek páronként merőlegesek egymásra a

$$\langle V,W\rangle := \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(VW), \qquad \forall V,W\in\mathcal{G} \tag{4.20}$$

invariáns skaláris szorzat szerint.

Az eddigieket kombinálva beláthatjuk, hogy

$$\mathcal{G}_+^+ = \left\{\begin{bmatrix} X & Y \\ Y & X \end{bmatrix}:\ X = I_mXI_m = -X^\dagger,\ Y = I_mYI_m = -Y^\dagger,\ \mathrm{tr}(X)=0\right\}. \tag{4.21}$$

A (4.10) leképezés definícióját felhasználva a

$$\mathcal{G}_+^+ \simeq s((u(m)\oplus u(n-m))\oplus(u(m)\oplus u(n-m))) \tag{4.22}$$

izomorfizmus adódik. Szükségünk lesz a többi altér explicit leírására is:

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_+^- &= \left\{\begin{bmatrix} X & Y \\ Y & X \end{bmatrix}:\ X = -I_mXI_m = -X^\dagger,\ Y = -I_mYI_m = -Y^\dagger\right\},\\
\mathcal{G}_-^+ &= \left\{\begin{bmatrix} X & Y \\ -Y & -X \end{bmatrix}:\ X = -I_mXI_m = X^\dagger,\ Y = -I_mYI_m = -Y^\dagger\right\},\\
\mathcal{G}_-^- &= \left\{\begin{bmatrix} X & Y \\ -Y & -X \end{bmatrix}:\ X = I_mXI_m = X^\dagger,\ Y = I_mYI_m = -Y^\dagger\right\}.
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Válasszuk ki $\mathcal{G}_-^-$ egy maximális ábeli részalgebráját és jelöljük $\mathcal{A}$-val. Tetszőleges ilyen választással élhetünk, de ismert [47], hogy bármely két ilyen választás egymásba vihető G_+^+ konjugálásos hatása segítségével. Konkrét választásunk

$$\mathcal{A} := \left\{q := \begin{bmatrix} \mathbf{q} & 0 \\ 0 & -\mathbf{q} \end{bmatrix}:\ \mathbf{q} = \mathrm{diag}(q_1,\dots,q_n),\ q_k\in\mathbb{R}\right\}. \tag{4.24}$$

Ellenőrizhető, hogy $\mathcal{A}$ centralizátora $\mathcal{G}$-ben az alábbi direkt összegként áll elő

$$\mathcal{C} = \mathcal{A} \oplus \mathcal{M}, \quad \mathcal{M} = \left\{ d := \mathrm{i} \begin{bmatrix} \mathbf{d} & 0 \\ 0 & \mathbf{d} \end{bmatrix} : \ \mathbf{d} = \mathrm{diag}(d_1, ..., d_n), \ d_k \in \mathbb{R}, \ \mathrm{tr}(d) = 0 \right\} < \mathcal{G}_+^+. \tag{4.25}$$

Jelölje A és M a megfelelő összefüggő részcsoportokat G-ben, amelyek Lie-algebrái $\mathcal{A}$ és $\mathcal{M}$. Az M megegyezik G_+^+

$$gqg^{-1} = q, \qquad \forall q \in \mathcal{A} \tag{4.26}$$

egyenlőséget kielégítő g elemeinek részcsoportjával. A $q \in \mathcal{A}$ elemet *regulárisnak* nevezzük, ha a (4.26) reláció pontosan M elemeire teljesül. Könnyen ellenőrizhető, hogy $q \in \mathcal{A}$ regularitása ekvivalens az alábbi feltételekkel:

$$q_i \neq 0 \quad i = 1, ..., n, \quad (q_j - q_k)(q_j + q_k) \neq 0 \quad 1 \leq j < k \leq m \quad \text{és} \quad m < j < k \leq n. \tag{4.27}$$

Válasszuk ki az $\mathcal{A}$ reguláris elemei által alkotott nyílt halmaz egy összefüggő komponensét, jelöljük $\mathcal{A}_c$-vel és legyen $\bar{\mathcal{A}}_c$ az $\mathcal{A}_c$ lezártja ($\mathcal{A}_c$-t nyílt Weyl-kamrának is szokás nevezni). Ismert, hogy G minden g eleme felbontható az alábbi módon:

$$g = g_+ e^q g^+, \quad \text{ahol} \quad q \in \bar{\mathcal{A}}_c, \ g_+ \in G_+, \ g^+ \in G^+. \tag{4.28}$$

A felbontásban szereplő q elem egyértelmű. Amennyiben q reguláris akkor a (g_+, g^+) pár az alábbi ambiguitástól eltekintve egyértelmű

$$(g_+, g^+) \to (g_+\mu, \mu^{-1}g^+) \qquad \forall \mu \in M. \tag{4.29}$$

A (4.28) általánosított Cartan felbontás esetén az $\mathcal{A}_c$ nyílt Weyl-kamra a q elemeit a (4.24) összefüggés figyelembevételével a következő módon parametrizálhatjuk

$$q_1 > q_2 > ... > q_m > 0 \quad \text{és} \quad q_{m+1} > q_{m+2} > ... > q_n > 0. \tag{4.30}$$

Az említett állítások bizonyítása megtalálható például [47]-ben.

Jegyezzük meg, hogy a $\mathcal{G}_+$ és $\mathcal{G}^+$ egydimenziós centrummal rendelkeznek. A $\mathcal{G}_+$ centrumát a

$$C^l := \mathrm{i}\, Q_{n,n} = \mathrm{i} \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1}_n \\ \mathbf{1}_n & 0 \end{bmatrix} \tag{4.31}$$

elem generálja, míg a $\mathcal{G}^+$ centrumát a

$$C^r := \mathrm{i} \begin{bmatrix} 0 & I_m \\ I_m & 0 \end{bmatrix} \tag{4.32}$$

elem feszíti ki. Mindkét elem eleget tesz a

$$C^\lambda \in \mathcal{M}^\perp \cap \mathcal{G}_+^+ \qquad \lambda = l, r \tag{4.33}$$

feltételnek. A (4.28) és (4.33) összefüggések fontos szerephez jutnak a következő alfejezetben ismertetendő szimmetria-redukciós tárgyalásban.

A (4.20) invariáns skaláris szorzat segítségével azonosítjuk a $\mathcal{G}$, $\mathcal{G}_+$ és $\mathcal{G}^+$ Lie-algebrákat a duális tereikkel, és ennek megfelelően azonosítjuk a koadjungált hatásokat a megfelelő adjungált hatásokkal. Megfontolásainkban kulcsszerepet játszik a G_+ csoport egy minimális (nem-nulla) dimenziójú koadjungált pályája. Először definiáljuk az alábbi $2n \times 2n$-es mátrixot tetszőleges nem-nulla $u \in \mathbb{C}^n$ oszlopvektort véve

$$\xi(u) := \frac{1}{2}\begin{bmatrix} X(u) & X(u) \\ X(u) & X(u) \end{bmatrix}, \quad \text{ahol} \quad X(u) := \mathrm{i}(uu^\dagger - \frac{u^\dagger u}{n}\mathbf{1}_n). \tag{4.34}$$

A (4.10)-(4.12) formulák segítségével könnyen ellenőrizhető, hogy fix $\kappa > 0$ és $x \neq 0$ választás esetén

$$\mathcal{O}_{\kappa,x} := \{xC^l + \xi(u) |\, u \in \mathbb{C}^n,\ u^\dagger u = 2\kappa n\} \tag{4.35}$$

a G_+ egy minimális dimenziójú koadjungált pályája. Az $\mathcal{O}_{\kappa,x}$ koadjungált pálya elemei a

$$g(a,b)(xC^l + \xi(u))g(a,b)^{-1} = (xC^l + \xi(au)) \tag{4.36}$$

formula szerint transzformálódnak $\forall g(a,b) \in G_+$ hatására. Mivel $\xi(u)$ csak egy $U(1)$ fázisfaktor erejéig határozza meg u-t, ezért $\mathcal{O}_{\kappa,x}$ azonosítható a $\mathbb{C}P_{n-1}$ komplex projektíve térrel.

4.2. Szimmetria redukció

A következőkben a $G = SU(n,n)$ Lie-csoport szabad geodetikusainak hamiltoni szimmetria redukcióját vizsgáljuk. A redukciót a már megismert eltolási-trükk segítségével végezzük el. A T^*G koérintő nyalábot a jobbszorzás felhasználásával trivializáljuk, valamint azonosítjuk a $\mathcal{G}$ Lie-algebrát duálisával a (4.20) invariáns skaláris szorzat segítségével. Tekintsük a

$$P := T^*G \times \mathcal{O}_{\kappa,x} \simeq (G \times \mathcal{G}) \times \mathcal{O}_{\kappa,x} \equiv \{(g, J, \zeta) \,|\, g \in G,\ J \in \mathcal{G},\ \zeta \in \mathcal{O}_{\kappa,x}\} \tag{4.37}$$

fázisteret, melyet ellátunk a

$$\Omega = \Omega_{T^*G} + \Omega_{\mathcal{O}_{\kappa,x}} \tag{4.38}$$

szimplektikus formával. Itt Ω_{T^*G} a kanonikus szimplektikus forma T^*G-n, amit

$$\Omega_{T^*G} = d\langle J, dgg^{-1}\rangle \tag{4.39}$$

alakban írhatunk, míg $\Omega_{\mathcal{O}_{\kappa,x}}$ a (4.35) $\mathcal{O}_{\kappa,x}$ koadjungált pályához tartozó (2.40) Kirillov-Kostant-Souriau szimplektikus forma. A későbbi számolásokban nem lesz szükségünk $\Omega_{\mathcal{O}_{\kappa,x}}$ explicit alakjára. A P fázistér rendelkezik a Poisson kommutáló függvények

$$H_k(g, J, \zeta) := \frac{1}{4k}\,\mathrm{tr}(J^{2k}), \qquad k = 1, 2, ..., n \tag{4.40}$$

családjával, melyek közül H_1 generálja a geodetikus mozgást. A (4.40) Hamilton-függvények által generált időfejlődések explicit módon felírhatóak. A (g_0, J_0, ζ_0) kezdeti érték esetén könnyen ellenőrizhető, hogy H_k folyama

$$(g(t), J(t), \zeta(t)) = (e^{tV_k}g_0, J_0, \zeta_0) \quad \text{ahol} \quad V_k := J_0^{2k-1} - \frac{1}{2n}\,\mathrm{tr}(J_0^{2k-1})\mathbf{1}_{2n}. \tag{4.41}$$

Megjegyezzük, hogy a H_k függvények mind valósak, hiszen J^{2k} eleget tesz a $(J^{2k})^\dagger = Q_{n,n}J^{2k}(Q_{n,n})^{-1}$ feltételnek, és $V_k \in \mathcal{G} = su(n,n)$.

Tekintsük a $G_+ \times G^+$ csoport egy (η, h) elemét. Definíció szerint, (η, h) hasson a P fázistéren a következő $\Psi_{\eta,h}$ szimplektomorfizmussal:

$$\Psi_{\eta,h}(g, J, \zeta) := (\eta g h^{-1}, \eta J \eta^{-1}, \eta \zeta \eta^{-1}). \tag{4.42}$$

A (4.40) H_k Hamilton-függvények $G_+ \times G^+$ invariánsak. A csoporthatást a

$$\Phi = (\Phi_+, \Phi^+) : P \to (\mathcal{G}_+, \mathcal{G}^+), \tag{4.43}$$

$$\Phi_+(g, J, \zeta) = \pi_+(J) + \zeta, \qquad \Phi^+(g, J, \zeta) = -\pi^+(g^{-1} J g), \tag{4.44}$$

ekvivariáns momentum leképezés generálja. Itt $\pi_+ : \mathcal{G} \to \mathcal{G}_+$ a θ, míg $\pi^+ : \mathcal{G} \to \mathcal{G}^+$ a γ involúció $(+1)$ sajátértékhez tartozó sajátalterére vetítő projektor.

További vizsgálatainkat a

$$\Phi = \nu := (0, -yC^r) \tag{4.45}$$

momentum kényszert előírva végezzük el, ahol $y \neq 0$ valós paraméter. A $G_+ \times G^+$ csoport hatása megőrzi a

$$P_c := \Phi^{-1}(\nu) \subset P \tag{4.46}$$

kényszerfelületet. Megköveteljük az x és y konstansoktól hogy elégítsék ki az

$$(x^2 - y^2) \neq 0 \tag{4.47}$$

egyenlőtlenséget. Ekkor a szimmetria csoport pályáinak

$$P_{\text{red}} := P_c/(G_+ \times G^+) \tag{4.48}$$

tere síma sokaság. Az Ω_{red} redukált szimplektikus forma és a H_k^{red} redukált Hamilton-függvények a már megismert módon adódnak,

$$\pi^* \Omega_{\text{red}} = \iota_{P_c}^* \Omega, \qquad \pi^* H_k^{\text{red}} = \iota_{P_c}^* H_k, \tag{4.49}$$

ahol $\pi : P_c \to P_{\text{red}}$ a projekció a pályák terére és $\iota_{P_c} : P_c \to P$ a P_c kényszerfelület természetes beágyazása P-be. A P_{red} símaságáról bővebben a [5] cikkben olvashatunk.

A következőekben belátjuk, hogy *a P_c kényszerfelületnek pontosan akkor létezik $(e^q, J, xC^l + \xi(u))$ alakú eleme, ha $|u_j|^2 = 2\kappa$ minden $j = 1, ..., n$-re és q eleget tesz a (4.27) regularitási feltételnek.*

A fenti állítás bizonyítása mutatni fogja azt is, hogy hogyan konstruálhatunk P_c-ben egy kényelmes globális szelést. Az állítás igazolásához tekintsük P alábbi pontját

$$(e^q, J, xC^l + \xi(u)), \quad \text{ahol} \quad q \in \mathcal{A}. \tag{4.50}$$

Alkalmazzuk a (4.19) felbontást J-re, azaz írjuk

$$J = J_+^+ + J_+^- + J_-^+ + J_-^- \tag{4.51}$$

alakban. Ekkor a (4.45) momentum kényszer második komponensét megvizsgálva az alábbi két egyenlőségre jutunk

$$J_+^+ = -xC^l - \pi_+^+(\xi(u)), \qquad J_+^- = -\pi_+^-(\xi(u)), \tag{4.52}$$

és

$$\pi^+(e^{-\operatorname{ad}_q}(J)) \equiv (\cosh \operatorname{ad}_q)(J_+^+ + J_-^+) - (\sinh \operatorname{ad}_q)(J_+^- + J_-^-) = yC^r. \tag{4.53}$$

Mivel $C^r \in \mathcal{G}_+^+$, a (4.53) egyenlet π_-^+ projekciója a

$$(\cosh \operatorname{ad}_q)(J_-^+) - (\sinh \operatorname{ad}_q)(J_+^-) = 0 \tag{4.54}$$

egyenlőség. A π_+^+ vetítést felhasználva pedig a következő összefüggésre jutunk:

$$(\cosh \operatorname{ad}_q)(J_+^+) - (\sinh \operatorname{ad}_q)(J_-^-) = yC^r. \tag{4.55}$$

A fenti számolásainkban felhasználtuk, hogy $\cosh \operatorname{ad}_q$ a $\mathcal{G}_s^r$-ből $\mathcal{G}_s^r$-be képez, $\sinh \operatorname{ad}_q$ viszont $\mathcal{G}_s^r$-ből $\mathcal{G}_{-s}^{-r}$-be ($-s = \mp$ ha $s = \pm$). Helyettesítsük a (4.52) egyenletből J_+^+-ot (4.55)-be és szorozzuk meg skalárisan egy $\mathcal{M}$-beli T elemmel. Így a

$$\langle T, \xi(u) \rangle = 0 \qquad \forall T \in \mathcal{M} \tag{4.56}$$

feltételhez jutunk, hiszen tudjuk, hogy C^l és C^r az $\mathcal{M}^\perp$ altérhez tartozik (4.33). Használjuk fel $\mathcal{M}$ (4.25) alakját és vegyük figyelembe $\xi(u)$ (4.34) definícióját. Ekkor a (4.56) feltételből már következik az

$$|u_j|^2 = 2\kappa, \qquad \forall j = 1, ..., n \tag{4.57}$$

kényszer. Ezután felhasználjuk az

$$M_{\text{diag}} := \{(\mu, \mu) \in G_+ \times G^+ \mid \mu \in M\} \tag{4.58}$$

részcsoportot arra, hogy q változtatása nélkül

$$(e^q, J, xC^l + \xi(u^\kappa)) \qquad u_j^\kappa := \sqrt{2\kappa}, \qquad j = 1, ..., n \tag{4.59}$$

alakra transzformáljuk a kényszerfelület pontjait. Vizsgáljuk meg a momentum kényszert egy (4.59) alakú pont esetében. A (4.55) blokk-diagonális komponenseit tekintve azonnal látható, hogy a $(J_-^-)_{k,k}$ elemek tetszőeleges valós számok ($k = 1, ..., n$), és az is ellenőrizhető, hogy teljesülnek az alábbi egyenlőségek

$$-\mathrm{i}\,\kappa \cosh(q_j - q_k) - (J_-^-)_{j,k} \sinh(q_j - q_k) = 0, \quad \text{ha} \quad 1 \le j < k \le m \quad \text{vagy} \quad m < j < k \le n. \tag{4.60}$$

Az utolsó egyenletből pontosan akkor fejezhető ki $(J_-^-)_{j,k}$, ha $(q_j - q_k) \neq 0$ különböző indexek esetén. Ezután (4.55) blokk off-diagonális részének elemzéséből arra jutunk, hogy

$$-\mathrm{i}\,\kappa \cosh(q_j + q_k) - (J_-^-)_{j,n+k} \sinh(q_j + q_k) = 0, \quad \text{ha} \quad 1 \le j < k \le m \quad \text{vagy} \quad m < j < k \le n, \tag{4.61}$$

valamint

$$-\mathrm{i}\,x \cosh(2q_k) - (J_-^-)_{k,n+k} \sinh(2q_k) = y(C^r)_{k,n+k}, \qquad \forall k = 1, ..., n. \tag{4.62}$$

A (4.61)-ból pontosan akkor határozható meg $(J_-^-)_{j,n+k}$, ha $(q_j + q_k) \neq 0$. Vegyük figyelembe (4.47) feltevésünket, miszerint $(x^2 - y^2) \neq 0$ és használjuk fel C^r (4.32) alakját. Ekkor azonnal látszik, hogy (4.62) akkor oldható meg $(J_-^-)_{k,n+k}$-re, ha $q_k \neq 0$ minden k esetén.

A fenti érvelést összegezve beláttuk, hogy (4.55) akkor és csak akkor oldható meg, ha u kielégíti (4.57)-et és q reguláris. Felhasználva $J_+^- = -\pi_+^-(\xi(u))$-t a (4.54) egyenlet most már megoldható J_-^+-ra is ($\cosh \mathrm{ad}_q$ invertálható $\mathcal{G}_-^+$-n). Ezzel a kívánt állítást bebizonyítottuk.

Ezen a ponton érdemes bevezetnünk néhány jelölést. Továbbra is tételezzük fel, hogy $\kappa > 0$ és x, y kielégíti (4.47) feltételt. Tetszőleges $q \in \mathcal{A}_c$ és $p \in \mathcal{A}$ esetén jelölje $J(q,p)$ a következő függvényt

$$J(q,p) := -xC^l - \xi(u^\kappa) + L(q,p), \tag{4.63}$$

ahol $(u^\kappa)_j = \sqrt{2\kappa}$ $(j = 1, ..., n)$ és $L(q,p) = \pi_-(J(q,p))$ mátrixelemeit az alábbi formulák jellemzik. A $1 \le j < k \le m$ vagy $m < j < k \le n$ esetén a mátrixelemekre a következő összefüggések teljesülnek

$$L_{j,k} = -L_{k,j} = -L_{j+n,k+n} = L_{k+n,j+n} = -\mathrm{i}\,\kappa \coth(q_j - q_k), \tag{4.64}$$

$$L_{j,k+n} = L_{k,j+n} = -L_{j+n,k} = -L_{k+n,j} = -\mathrm{i}\,\kappa \coth(q_j + q_k). \tag{4.65}$$

A $1 \le j \le m$ és $m < k \le n$ esetén

$$L_{j,k} = -L_{k,j} = -L_{j+n,k+n} = L_{k+n,j+n} = -\mathrm{i}\,\kappa \tanh(q_j - q_k), \tag{4.66}$$

$$L_{j,k+n} = L_{k,j+n} = -L_{j+n,k} = -L_{k+n,j} = -\mathrm{i}\,\kappa \tanh(q_j + q_k). \tag{4.67}$$

Végül $1 \le j \le m$, $m < k \le n$, és $1 \le l \le n$ esetén

$$L_{j,j+n} = -L_{j+n,j} = -\frac{\mathrm{i}\,y}{\sinh(2q_j)} - \mathrm{i}\,x \coth(2q_j), \tag{4.68}$$

$$L_{k,k+n} = -L_{k+n,k} = \frac{\mathrm{i}\,y}{\sinh(2q_k)} - \mathrm{i}\,x \coth(2q_k). \tag{4.69}$$

$$L_{l,l} = -L_{l+n,l+n} = p_l. \tag{4.70}$$

A $J(q,p)$ (4.63) definícióját használva tekintsük az

$$S := \{(e^q, J(q,p), xC^l + \xi(u^\kappa)) \,|\, q \in \mathcal{A}_c,\, p \in \mathcal{A}\} \tag{4.71}$$

halmazt. A fejezet fő eredménye a következő: *S egy olyan részsokasága P-nek, ami a P_c (4.46) kényszerfelületben fekszik, és a $G_+ \times G^+$ csoport minden P_c-beli pályáját pontosan egyszer metszi. Az Ω (4.38) szimplektikus forma „visszahúzottja” S-re megegyezik az*

$$\Omega_S = \sum_{k=1}^{n} dp_k \wedge dq_k \tag{4.72}$$

szimplektikus formával. Tehát az (S, Ω_S) szimplektikus sokaság a $(P_{\mathrm{red}}, \Omega_{\mathrm{red}})$ (4.48) redukált fázistér egy modellje, amelyet azonosíthatunk a kanonikus szimplektikus struktúrával ellátott $T^*\mathcal{A}_c$ koérintő nyalábbal.

A fenti állítások igazolásához először használjuk azt az észrevételt, hogy a $G_+ \times G^+$ hatás révén a P_c bármely pontja az alábbi alakra hozható

$$(e^q, J, xC^l + \xi(u^\kappa)), \qquad q \in \mathcal{A}_c. \tag{4.73}$$

Ez a (4.28) felbontásból következik, figyelembe véve, hogy a q szükségszerű regularitását már beláttuk. A (4.50)-(4.62) összefüggések között vázolt gondolatmenetet követve könnyen látható, hogy a (4.73)-beli J a (4.63) egyenlet szerinti $J(q,p)$ alakban írható. Valójában a (4.63) kifejezést eleve a kényszeregyenletek korábban ismertetett megoldásából nyertük. Ezek után tegyük fel, hogy teljesül a

$$(\eta e^q h^{-1}, \eta J(q,p)\eta^{-1}, xC^l + \eta\xi(u^\kappa)\eta^{-1}) = (e^{q'}, J(q',p'), xC^l + \xi(u^\kappa)), \quad (\eta, h) \in G_+ \times G^+, \tag{4.74}$$

egyenlőség két S-beli pontra (amelye így mérték-ekvivalensek lennének). A (4.28) felbontás egyértelműségéből azonnal adódik, hogy $e^q = e^{q'}$ és így $q = q'$, amiből már következik, hogy $(\eta, h) = (\mu, \mu)$, ahol μ az M csoport eleme. Ezek után tekintsük (4.74) második komponensét. Innen látható, hogy $p = p'$. Ez azt jelenti, hogy S tekintett két pontja egybeesik. Ezzel beláttuk, hogy S a P_c-beli pályák globális szelését adja.

Könnyen meghatározhatjuk az Ω „visszahúzottját” S-re, és így a (4.72) összefüggésre jutunk. Mivel S a P_c-beli pályák egy globális szelése, ezért (S, Ω_S) a $(P_{\mathrm{red}}, \Omega_{\mathrm{red}})$ redukált fázistér egy modellje. Azonosítsuk továbbá $\mathcal{A}$-t és duálisát $\mathcal{A}^*$-t a (4.20) skaláris szorzat segítségével, így (S, Ω_S) és a $T^*\mathcal{A}_c \simeq \mathcal{A}_c \times \mathcal{A}$ koérintő nyaláb egymással szimplektomorf. Ezzel be is láttuk a kívánt állításokat.

A fentiekből az is könnyen látható, hogy a szabad mozgás redukciójából kapott modell Liouville integrálható. Az alábbiakban konkrétan ismertetjük az integrálhatóságot realizáló függvényeket.

A

$$H_k^{\mathrm{red}} = \frac{1}{4k}\,\mathrm{tr}(J(q,p)^{2k}), \quad k = 1, ..., n \tag{4.75}$$

Hamilton-függvények egymással involúcióban állnak a $T^*\mathcal{A}_c$ kanonikus szimplektikus struktúrájához tartozó Poisson zárójelre nézve. Az általánosított Sutherland modell $H(q,p)$ (4.1) Hamilton függvénye Liouville integrálható, mivel

$$H(q,p) = \frac{1}{4}\,\mathrm{tr}(J(q,p)^2) = H_1^{\mathrm{red}}(q,p). \tag{4.76}$$

Tudjuk, hogy H_k-k Poisson kommutáltak a (P, Ω) fázistéren, ezért a (4.75) redukált Hamilton-függvények involúcióban állnak. A (4.75) függvények vezető tagja homogén polinom $p_1, ..., p_n$-ben. A vezető tagokat megvizsgálva azonnal látszik, hogy ezek a függvények funkcionálisan függetlenek. A szimmetria-redukciós gondolatmenet garantálja azt is, hogy H_k^{red} folyamai teljesek. A (4.76) egyenlőség direkt számolással igazolható.

A következőkben ismertetjük, hogyan konstruálhatók meg a H_k^{red} redukált Hamilton-függvények folyamai a (4.41) összefüggés szerinti „szabad folyamokból”. Válasszuk kezdeti értéknek $(q(0), p(0))$-t. A hamiltoni redukció következményeként, a H_k^{red} Hamilton-függvény folyamaihoz tartozó $(q(t), p(t))$ megoldások leolvashatóak az alábbi egyenletekből:

$$\begin{aligned}&\left(e^{q(t)}, J(q(t),p(t)), xC^l + \xi(u^\kappa)\right) = \\ &= \left(\eta(t)e^{tV_k}e^{q(0)}h(t)^{-1}, \eta(t)J(q(0),p(0))\eta(t)^{-1}, \eta(t)(xC^l + \xi(u^\kappa)\eta(t)^{-1}\right),\end{aligned} \tag{4.77}$$

ahol

$$V_k = J(q(0),p(0))^{2k-1} - \frac{1}{2n}\,\mathrm{tr}(J(q(0),p(0))^{2k-1})\mathbf{1}_{2n} \tag{4.78}$$

és $(\eta(t), h(t)) \in G_+ \times G^+$. Az $(\eta(t), h(t))$ függvények meghatározásához azt kell figyelembe vennünk, hogy a (4.77) bal oldala az S széléshez tartozik. Így a megoldáshoz az

$$e^{tV_k} e^{q(0)} = \eta(t)^{-1} e^{q(t)} h(t), \qquad (\eta(t), q(t), h(t)) \in G_+ \times \mathcal{A}_c \times G^+, \tag{4.79}$$

felbontást kell meghatároznunk az $\eta(0) = h(0) = \mathbf{1}_{2n}$ kezdeti érték és

$$\eta(t)\xi(u^\kappa)\eta(t)^{-1} = \xi(u^\kappa) \tag{4.80}$$

mellékfeltétel esetén. A $p(t)$ időfejlődését ezután a

$$p(t) = \pi_-^-(\eta(t) J(q(0), p(0)) \eta(t)^{-1}) = \pi_-^-(\eta(t) L(q(0), p(0)) \eta(t)^{-1}) \tag{4.81}$$

egyenlet írja le.

Amennyiben csak a $q(t)$-re szeretnénk meghatározni, akkor egyszerűbb utat jelent a $g\Gamma(g^{-1})$ kifejezést vizsgálata. Így (4.79)-at felhasználva az

$$e^{2q(t)} D_m = \eta(t) e^{tV_k} e^{2q(0)} D_m e^{tV_k^\dagger} \eta(t)^{-1} \tag{4.82}$$

egyenlőségre jutunk. A (4.82) egyenlet alapján elmondhatjuk, hogy az

$$e^{tV_k} e^{2q(0)} D_m e^{tV_k^\dagger} \tag{4.83}$$

mátrix sajátértékei megegyeznek az $e^{2q(t)} D_m$ diagonális mátrix főátlóbeli elemeivel. A (4.82) összefüggés, a D_m (4.4) definíciója és a nyílt Weyl kamra elemeinek (4.30) tulajdonsága figyelembevételével látható, hogy a kérdéses sajátértékek mind különbözőek. Tehát $q(t)$ *meghatározása mátrix diagonalizálássá egyszerűsödik.*

Összefoglalva, a fejezetben megvizsgáltuk a (4.1) általánosított Sutherland modellt hamiltoni szimetria-redukciós nézőpontból. Az $SU(n, n)$ Lie-csoport szabad geodetikusait redukáltuk. Ebből a képből azonnal adódott a három független csatolási állandóval rendelkező modell integrálhatósága. A redukciós képet alkalmazva egy megoldási algoritmust is kaptunk.

Egy jövőbeli kutatási témája lehet a modell szóráselméletének vizsgálata a [40, 43] cikkek nyomdokaiban haladva. Szintén érdekes lehet a modell kvantummechanikájának tanulmányozása (például kvantum hamiltoni redukcióval).

5. A trigonometrikus Sutherland modell és duálisa

A 2.6 fejezetben már említettük, hogy a [44] cikkben Ruijsenaars kidolgozta a Sutherland modell P fázistere és a megfelelő duális modell $\hat{P}_c$ fázistere közötti hatás-szög leképezést. Továbbá tekintette a fázistér bizonyos P_1 és P_2 fedéseit, valamint a $\hat{P}$ megfelelő $\hat{P}_1$ és $\hat{P}_2$ fedéseit. Ezek a Sutherland modell különböző lehetséges fizikai interpretációihoz (egyenes vagy körön mozgó, megkülönböztethető vagy megkülönböztethetetlen részecskék) kapcsolhatók. Ebben a fejezetben a [20] cikkünkre támaszkodva bemutatjuk Ruijsenaars dualitási és fedőleképezéseinek kapcsolatát a

$$G_2 := \mathbb{R} \times SU(n) \longrightarrow G_1 := U(1) \times SU(n) \longrightarrow G := U(n) \tag{5.1}$$

fedő homomorfizmusokkal. Tárgyalásunkhoz a T^*G koérintő nyalábot redukáljuk a G Lie-csoport konjugálásos hatásával, majd hasonló módon megvizsgáljuk G_i hatását T^*G_i-n ($i = 1, 2$) is. A megfelelő szimmetria csoportok között fennáll a

$$\bar{G} := G/\mathbb{Z}_G \simeq G_1/\mathbb{Z}_{G_1} \simeq G_2/\mathbb{Z}_{G_2} \tag{5.2}$$

kapcsolat, ahol $\mathbb{Z}_G$ a G csoport centrumát jelöli és hasonló jelölést alkalmazunk a G_i csoportok centrumaira is. A konjugálás révén mindhárom esetben effektíven a $\bar{G}$ csoport hat. A szimplektikus redukcióhoz a $\bar{G}$-hatásához tartozó momentum leképezés szokásos (2.40) értékét használjuk fel. A redukció után a (5.1) fedő homomorfizmusok mintájára természetes leképezéseket kapunk a megfelelő redukált fázisterek között:

$$(T^*G_2)_{\text{red}} \longrightarrow (T^*G_1)_{\text{red}} \longrightarrow (T^*G)_{\text{red}}. \tag{5.3}$$

Konstrukciónknak köszönhetően a három alternatív modellpár esetén az (5.3)-ban szereplő redukált fázisterekre érvényesek az

$$P_2 \simeq (T^*G_2)_{\text{red}} \simeq \hat{P}_2, \quad P_1 \simeq (T^*G_1)_{\text{red}} \simeq \hat{P}_1, \quad P \simeq (T^*G)_{\text{red}} \simeq \hat{P}_c \tag{5.4}$$

azonosítások. A fenti azonosításoknál alkalmaztuk a redukált fázisterek (2.128) és (2.129) definícióit. A redukált fázisterek konkrét modelljeinek leírása, nevezetesen $P, \hat{P}_c$, $P_1, \hat{P}_1$ és $P_2, \hat{P}_2$, jelenti munkánk lényegét.

Az (5.4) relációkon keresztül az

$$\mathcal{R}_2 : P_2 \longrightarrow \hat{P}_2, \quad \mathcal{R}_1 : P_1 \longrightarrow \hat{P}_1, \quad \mathcal{R} : P \longrightarrow \hat{P}_c \tag{5.5}$$

dualitási transzformációk könnyen interpretálhatóak, mint szimplektikus leképezések a megfelelő fázisterek között. Az (5.3) összefüggések közvetlen következményeként adódik a

$$\begin{tikzcd} P_2 \arrow[r, "\mathcal{R}_2"] \arrow[d] & \hat{P}_2 \arrow[d] \\ P_1 \arrow[r, "\mathcal{R}_1"] \arrow[d] & \hat{P}_1 \arrow[d] \\ P \arrow[r, "\mathcal{R}"] & \hat{P}_c \end{tikzcd} \tag{5.6}$$

kommutatív diagramm is, melyen a vízszintes nyilak a dualitási transzformációkat jelölik a függőleges nyilak pedig (lokálisan szimplektikus) fedő Poisson leképezéseket. A diagrammon látható leképezések konstrukciója Ruijsenaars [44] munkájában[1] is megtalálható. Az általunk alkalmazott csoportelméleti tárgyalás egy új utat mutat a különböző fázisterek közötti fedőleképezések vizsgálatára, továbbá jelentős technikai egyszerűsítést jelent [44]-hoz képest, hiszen az $\mathcal{R}$ leképezés szimplektikussága nyilvánvaló módon adódik a levezetésből (a [44] referenciában sokkal körülményesebb módon került ez belátásra).

A következő alfejezetben bemutatjuk a T^*G releváns hamiltoni redukcióját [32] és részletesen ismertetjük az $\mathcal{R} : P \to \hat{P}_c$ dualitási transzformációt, majd rátérünk az (5.6)-ban megjelenő fedőleképezések leírására.

5.1. Előkészületek a $T^*U(n)$ szimplektikus redukciójához

Tekintsük a $G = U(n)$ Lie-csoportot és azonosítsuk a megfelelő $\mathcal{G} := u(n)$ Lie-algebrát duálisával, $\mathcal{G}^*$-al, a következő invariáns skaláris szorzat révén

$$\langle X, Y\rangle := -\operatorname{tr}(XY), \qquad \forall X, Y \in \mathcal{G}. \tag{5.7}$$

Használjuk fel (5.7)-et és végezzük el a T^*G kotérintő nyaláb trivializálását a jobb szorzás segítségével az alábbiak szerint

$$T^*G \simeq G \times \mathcal{G}^* \simeq G \times \mathcal{G} = \{(g, J) \,|\, g \in G,\ J \in \mathcal{G}\}. \tag{5.8}$$

A koérintő nyalábot ellátjuk az

$$\Omega_{T^*G} = -d\operatorname{tr}(Jdgg^{-1}) \tag{5.9}$$

kanonikus szimplektikus formával. Mivel az (5.2)-beli $\bar{G}$ csoport $\bar{G} \simeq SU(n)/\mathbb{Z}_n$ módon is realizálható ezért a $\bar{\mathcal{G}}$ Lie-algebrája azonosítható $su(n)$-nel, továbbá $\bar{\mathcal{G}}^*$-al is az invariáns skaláris szorzat révén. Jelölje $\mathcal{O}$ a $\bar{G}$ csoport minimális dimenziójú koadjungált pályáját. A pályát az alábbi halmaz adja

$$\mathcal{O} := \{\xi = \xi(x, v) \,|\, \xi(x, v) := \mathrm{i}\, x(\mathbf{1}_n - vv^\dagger),\ v \in \mathbb{C}^n,\ |v|^2 = n\}, \tag{5.10}$$

ahol x nem-nulla valós paraméter. Az $\mathcal{O}$ pálya $\Omega_{\mathcal{O}}$ szimplektikus formája a $\sqrt{n}$ normájú v vektor komponenseivel parametrizálva a következő alakot ölti

$$\Omega_{\mathcal{O}} = \mathrm{i}\, x dv^\dagger \wedge dv. \tag{5.11}$$

Az (5.11) összefüggés jelentésének megvilágításához megjegyezzük, hogy $\mathcal{O}$ megegyezik a $\mathbb{C}P^{n-1}$ komplex projektív térrel, és jól ismert tény (lásd [27]), hogy $\mathbb{C}P^{n-1}$ kiadódik a $\mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$ szimplektikus vektortér $U(1)$ kanonikus hatásával való redukálásával (ezt a hatást $v \mapsto |v|^2$ momentum leképezés generálja). Amennyiben a momentum értéket n-nek választjuk, akkor az így adódó redukált szimplektikus forma (5.11)-el egyezik meg.

[1] Megjegyezzük, hogy a P, P_2, $\hat{P}_c$, $\hat{P}_2$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}_2$ szimbólumok (5.6)-ban a megfelelnek [44] cikk (1.74) diagrammján található Ω, $\tilde{\Omega}$, $\hat{\Omega}^\sharp$, $\hat{\Omega}^{\sharp c}$, $\Phi^\sharp$, $\tilde{\Phi}^\sharp$ jelöléseknek.

A redukció kiindulópontjául az (M, Ω_M) szimplektikus sokaság szolgál, amelyet az alábbi formulák jellemeznek:

$$M = T^*G \times \mathcal{O}, \qquad \Omega_M = \Omega_{T^*G} + \Omega_{\mathcal{O}}. \tag{5.12}$$

Az Ω_M szimplektikus formához tartozó nem-eltűnő Poisson zárójelek:

$$\{g_{jk}, J_a\}_M = (T_a g)_{jk}, \quad \{J_a, J_b\}_M = \langle J, [T_a, T_b]\rangle, \quad \{\xi_a, \xi_b\}_M = \langle \xi, [T_a, T_b]\rangle. \tag{5.13}$$

Itt felhasználtuk a $J_a := \langle J, T_a\rangle$ és $\xi_a := \langle \xi, T_a\rangle$ jelöléseket, ahol $\{T_a\}$ a $\mathcal{G} = u(n)$ Lie-algebra bázisa.

Az M fázistéren a Hamilton-függvények két családját vizsgáljuk, melyeket a

$$\mathcal{H}_k(g, J, \xi) := \frac{1}{k}\mathrm{tr}(-\mathrm{i}\, J)^k, \quad \forall k = 1, \dots, n, \tag{5.14}$$

és a

$$\hat{\mathcal{H}}_k(g, J, \xi) := \frac{1}{k}\mathrm{tr}(g^k + g^{-k}), \quad \hat{\mathcal{H}}_{-k}(g, J, \xi) := \frac{1}{\mathrm{i}\, k}\mathrm{tr}(g^k - g^{-k}), \quad \forall k = 1, \dots, n \tag{5.15}$$

összefüggések definiálnak. Egy tetszőlegesen választott k és $(g(0), J(0), \xi(0))$ kezdeti érték esetén $\mathcal{H}_k$ az alábbi folyamot indukálja

$$(g(t), J(t), \xi(t)) = (g(0)\exp(\mathrm{i}\, t(-\mathrm{i}\, J(0))^{k-1}), J(0), \xi(0)). \tag{5.16}$$

A fenti $\hat{\mathcal{H}}_k$ függvény hamiltoni folyama

$$(g(t), J(t), \xi(t)) = (g(0), J(0) + t(g(0)^k - g(0)^{-k}), \xi(0)), \tag{5.17}$$

$\hat{\mathcal{H}}_{-k}$-é pedig

$$(g(t), J(t), \xi(t)) = (g(0), J(0) - \mathrm{i}\, t(g(0)^k + g(0)^{-k}), \xi(0)). \tag{5.18}$$

Az (5.14) és (5.15) függvények a

$$\{\mathcal{H}_k, \mathcal{H}_l\}_M = 0, \qquad \{\hat{\mathcal{H}}_a, \hat{\mathcal{H}}_b\}_M = 0 \tag{5.19}$$

Poisson zárójel relációkat elégítik ki tetszőleges indexek esetén, azaz J és g „spektrálinvariánsai” explicit módon integrálható függvényekből álló ábeli algebrákat alkotnak.

Tekintsük $\bar{G}$ egy $[y]$ elemét (y a G egy tetszőleges eleme). Ekkor az M tetszőleges (g, J, ξ) pontján az

$$A_{[y]}(g, J, \xi) := (ygy^{-1}, yJy^{-1}, y\xi y^{-1}), \tag{5.20}$$

definíció szerint hatva szimplektikus csoporthatást nyerünk, továbbá az is igaz, hogy az (5.14) és (5.15) Hamilton-függvények $\bar{G}$-invariánsak. Az (5.20) $\bar{G}$-hatáshoz a $\Phi : M \to \bar{\mathcal{G}}^* \simeq su(n)$ ekvivariáns momentum leképezés tartozik, melyet a következő egyenlőség definiál

$$\Phi(g, J, \xi) = J - g^{-1}Jg + \xi. \tag{5.21}$$

A szimplektikus redukciót a $\Phi = 0$ momentum értéknél végezzük el. Ez ekvivalens a [32]-ben vizsgált redukcióval.

Belátható, hogy a Φ momentum leképezésnek a nulla reguláris értéke és a $\bar{G}$ csoport szabadon hat a

$$M_0 := \Phi^{-1}(0) \subset M \tag{5.22}$$

kényszerfelületen. Így M_0 egy beágyazott részsokasága M-nek és

$$(T^*G)_{\text{red}} := M_0/\bar{G} \tag{5.23}$$

síma sokaság.

A $(T^*G)_{\text{red}}$ redukált fázistéren az Ω_{red} redukált szimplektikus formát, valamint a $\{H_k\}$ és $\{\hat{H}_{\pm k}\}$ redukált Hamilton-függvényeket a következő formulák jellemzik

$$\pi_0^*(\Omega_{\text{red}}) = \iota_0^*(\Omega_M), \qquad H_k \circ \pi_0 = \mathcal{H}_k \circ \iota_0, \qquad \hat{H}_{\pm k} \circ \pi_0 = \hat{\mathcal{H}}_{\pm k} \circ \iota_0, \tag{5.24}$$

ahol $\pi_0 : M_0 \to M_0/\bar{G}$ a természetes projekció és $\iota_0 : M_0 \to M$ a tautológikus beágyazás. Az (5.19)-ből már következnek a

$$\{H_k, H_l\}_{\text{red}} = 0, \qquad \{\hat{H}_a, \hat{H}_b\}_{\text{red}} = 0 \tag{5.25}$$

relációk, ahol $\{\cdot,\cdot\}$ az Ω_{red}-hez tartozó Poisson zárójelet jelöli. A H_k és $\hat{H}_{\pm k}$ redukált Hamilton-függvények folyamai a π_0 projekcióval adódnak $\mathcal{H}_k$ és $\hat{\mathcal{H}}_{\pm k}$ folyamaiból.

Szimplektikus redukciónál gyakorta vizsgáljuk a kényszerfelületbeli pályák globális szelését. Ezáltal a redukált fázistér modelljét nyerjük. A következő fejezetben megkonstruáljuk a redukált fázistér két modelljét, de csak az egyik adódik közvetlenül globális szelésként.

5.2. $T^*U(n)$ redukciója és duális rendszerek

Ebben az alfejezetben ismertetjük a $((T^*G)_{\text{red}}, \Omega_{\text{red}})$ redukált fázistér két modelljét. Az elsőt a trigonometrikus Sutherland modell (P, ω) fázisterével azonosíthatjuk, míg a másodikat a Sutherland modell Ruijsenaars duálisának $(\hat{P}_c, \hat{\omega}_c)$ fázisterével. A $((T^*G)_{\text{red}}, \Omega_{\text{red}})$ azonosítása (P, ω)-val jól ismert [32]. A $((T^*G)_{\text{red}}, \Omega_{\text{red}})$ azonosítását $(\hat{P}_c, \hat{\omega}_c)$-vel a [21, 22] cikkekben alkalmazott módszerek segítségével a [20] publikációban dolgoztuk ki. Az egymással duális modellek lényegében két koordinátarendszert jelentenek a $(T^*G)_{\text{red}}$ redukált fázistéren és az áttérést leíró koordináta transzformáció a dualitási transzformáció (hatás-szög leképezés).

5.2.1. A trigonometrikus Sutherland modell

Tekintsük az $U(n)$ Lie-csoport standard maximális tóruszát,

$$\mathbb{T}(n) = \underbrace{U(1) \times U(1) \times \cdots \times U(1)}_{n \text{ darab}} < U(n), \tag{5.26}$$

amelyet diagonális mátrixok alkotnak. Jelölje $\mathbb{T}(n)^0$ a maximális tórusz reguláris elemeinek halmazát, ami a következő módon realizálható

$$\mathbb{T}(n)^0 = \{\tau = \text{diag}(\tau_1, \ldots, \tau_n) \in \mathbb{T}(n) \,|\, \tau_a \neq \tau_b, \quad \text{ahol} \quad 1 \leq a \neq b \leq n\}. \tag{5.27}$$

A maximális tórusz reguláris része n darab körön ($U(1)$-en) mozgó megkülönböztethető, nem-egybeeső részecske konfigurációs terének tekinthető. Az $S(n)$ permutációcsoport szabadon hat $\mathbb{T}(n)^0$-on (bármely $\tau \in \mathbb{T}(n)^0$ elem diagonális mátrixelemeit permutálja), ezért

$$Q(n) := \mathbb{T}(n)^0 / S(n) \tag{5.28}$$

síma sokaság. Belátható [20], hogy a $\mathbb{T}(n)^0$ összesen $(n-1)!$ összefüggő komponenssel rendelkezik, továbbá, hogy $Q(n)$ összefüggő. A továbbiakban $Q(n)$-t *n darab „körön mozgó” megkülönböztethetetlen részecske konfigurációs tereként interpretáljuk.*

A $(T^*\mathbb{T}(n)^0, \Omega_{T^*\mathbb{T}(n)^0})$ koérintő nyalábot tekintve az alábbi azonosításokat végezhetjük el

$$T^*\mathbb{T}(n)^0 = \mathbb{T}(n)^0 \times \mathbb{R}^n = \{(\tau, p), \mid \tau \in \mathbb{T}(n)^0,\, p \in \mathbb{R}^n\}, \quad \Omega_{T^*\mathbb{T}(n)^0} = \sum_{k=1}^{n} dp_k \wedge \left(\frac{d\tau_k}{\mathrm{i}\,\tau_k}\right). \tag{5.29}$$

Vezessük be a q_k lokális koordinátákat a $\tau_k = e^{\mathrm{i}\,q_k}$ parametrizálás segítségével. Ekkor teljesül az

$$\Omega_{T^*\mathbb{T}(n)^0} = \sum_{k=1}^{n} dp_k \wedge dq_k \tag{5.30}$$

egyenlőség, azaz $\Omega_{T^*\mathbb{T}(n)^0}$ megegyezik a Darboux formával. Az (5.28) összefüggést felhasználva, jól ismert általános eredmények alapján [1] elmondhatjuk, hogy a két említett konfigurációs tér koérintő nyalábjaira igaz az

$$(T^*Q(n), \Omega_{T^*Q(n)}) = (T^*\mathbb{T}(n)^0, \Omega_{T^*\mathbb{T}(n)^0})/S(n) \tag{5.31}$$

reláció.

A $\mathbb{T}(n)^0 \to Q(n)$ projekció lokálisan (fedő) diffeomorfizmus, amely a $T^*\mathbb{T}(n)^0 \to T^*Q(n)$ (fedő) leképezést indukálja. Ezen leképezés révén $\Omega_{T^*Q(n)}$ „visszahúzottja” megegyezik $\Omega_{T^*\mathbb{T}(n)^0}$-al. A $T^*\mathbb{T}(n)^0$ koérintő nyaláb (5.29)-beli (τ, p) koordinátáinak használata esetén egy tetszőleges $\sigma \in S(n)$ a következő σ összefüggés szerint hat a koérintő nyalábon:

$$\sigma : (\tau, p) \mapsto (\sigma(\tau), \sigma(p)), \tag{5.32}$$

ahol $\sigma(\tau)$ és $\sigma(p)$ a megfelelő diagonális elemek permutációját jelöli. Röviden, *$T^*Q(n)$ tekinthető úgy is mintha $T^*\mathbb{T}(n)^0$-on a τ és p elemeket szimultán permutációktól eltekintve vennénk csak figyelembe.*

A $Q(n)$ topológiája nem-triviális, ezért gyakorta előnyös $Q(n)$ helyett $\mathbb{T}(n)^0$-t vizsgálni azzal a megkötéssel, hogy minden elemet csak permutációktól eltekintve veszünk figyelembe. Ily módon a $T^*Q(n)$-on értelmezett síma függvényeket azonosíthatjuk a $T^*\mathbb{T}(n)^0$-en értelmezett $S(n)$-invariáns függvényekkel.

A fentieket összegezve: *Az n megkülönböztethetetlen részecskét leíró Sutherland modell fázistere és szimplektikus struktúrája*

$$(P, \omega) := (T^*Q(n), \Omega_{T^*Q(n)}). \tag{5.33}$$

A modell Poisson kommutáló Hamilton-függvényei az

$$L_{\mathrm{Suth}}(q,p) := \sum_{k=1}^{n} p_k E_{kk} - \frac{\mathrm{i}\,x}{2} \sum_{a \neq b} \frac{E_{ab}}{\sin \frac{q_a - q_b}{2}} \tag{5.34}$$

Lax mátrix spektrálinvariánsaiként állnak elő. Itt $L_{\mathrm{Suth}}(q,p)$-re úgy tekintünk, mint az (5.29)-beli $T^*\mathbb{T}(n)^0$-on értelmezett függvényre. Az $L_{\mathrm{Suth}}(q,p)$ szimmetrikus függvényei $S(n)$-invariánsak és így jól definiáltak $T^*Q(n)$-n.

A könnyebb érthetőség kedvéért felidézzük az (5.12)-beli (M,Ω_M) redukciójával kapcsolatos fontosabb lépéseket. Ehhez célszerű bevezetni az alábbi módon definiált leképezést:

$$F:(\tau,p)\mapsto(\tau,J(\tau,p),\xi(x,\hat{v})),\quad J(\tau,p):=\mathrm{i}\sum_{k=1}^n p_kE_{kk}+\mathrm{i}\sum_{a\neq b}\frac{xE_{ab}}{1-\tau_b/\tau_a},\quad \hat{v}:=[1,1,\dots,1]^T. \tag{5.35}$$

Az alfejezet egyik fő eredménye a következő: *Az F síma és injektív módon képez $T^*\mathbb{T}(n)^0$-ból M-be, melyre $T^*\mathbb{T}(n)^0$ M-beli M^F képe egy olyan beágyazott részsokasága M_0-nak (5.22), ami $\bar{G}$ minden pályáját metszi. Amennyiben $\bar{G}$ egy $[y]$ eleme az M^F egy pontját M^F-be képezi, akkor az $[y]$-hez tartozó G-beli y reprezentáns választható a permutációcsoport egy alkalmas elemének. Továbbá minden G-beli σ permutáció M^F-ből M^F-be képez és F $S(n)$-ekvivariáns leképezés. Végezetül teljesül a következő egyenlőség:*

$$F^*(\Omega_M)=\Omega_{T^*\mathbb{T}(n)^0}. \tag{5.36}$$

Az említett állításokból közvetlenül adódik, hogy az *(5.23)* $(T^*Q(n),\Omega_{T^*Q(n)})$ *koérintő nyaláb a $((T^*G)_{\mathrm{red}},\Omega_{\mathrm{red}})$ redukált fázistér egy modellje. Valóban, legyen (τ,p) a $T^*Q(n)=T^*\mathbb{T}(n)^0/S(n)$-beli $[(\tau,p)]$ elem egy reprezentánsa, ekkor az*

$$\mathcal{F}:[(\tau,p)]\mapsto(\pi_0\circ F)(\tau,p) \tag{5.37}$$

leképezés $\mathcal{F}:T^*Q(n)\to(T^*G)_{\mathrm{red}}$ szimplektomorfizmust definiál. Az $\mathcal{F}$ szimplektomorfizmus segítségével azonosítjuk a $(T^*G)_{\mathrm{red}}$ redukált fázistéren értelmezett függvényeket a $T^*\mathbb{T}(n)^0$-on értelmezett $S(n)$-invariáns függvényekkel. Ekkor a H_k redukált Hamilton-függvények az alábbi alakban írhatók

$$H_k(\tau,p)=\frac{1}{k}\mathrm{tr}(-\mathrm{i}\,J(\tau,p))^k,\qquad k=1,\dots,n, \tag{5.38}$$

míg a $\{\hat{H}_{\pm k}\}$ redukált függvényekre a következő egyenlőségek teljesülnek

$$\hat{H}_k(\tau,p)=\frac{1}{k}\sum_{j=1}^n((\tau_j)^k+(\tau_j)^{-k}),\qquad \hat{H}_{-k}(\tau,p)=\frac{1}{k\,\mathrm{i}}\sum_{j=1}^n((\tau_j)^k-(\tau_j)^{-k}). \tag{5.39}$$

Alkalmazva a $\tau_j=e^{\mathrm{i}\,q_j}$ egyenlőséget azt kapjuk, hogy a H_k-k megegyeznek az $L_{\mathrm{Suth}}(q,p)$ Lax mátrix spektrálinvariánsaival.

Az imént ismertetett állítások igazolásához a

$$(T^*G)_{\mathrm{red}}=M_0/\bar{G}\simeq M^F/S(n)\simeq T^*\mathbb{T}(n)^0/S(n)=T^*Q(n) \tag{5.40}$$

azonosítások érvényességét kell ellenőrizni. Ehhez először megvizsgáljuk a

$$J-g^{-1}Jg+\xi(x,v)=0,\quad \text{ahol}\quad \xi(x,v)=\mathrm{i}\,x(\mathbf{1}_n-vv^\dagger),\quad |v|^2=n \tag{5.41}$$

momentum kényszert. A mértékszabadságot felhasználva az (5.41) egyenlet tetszőleges megoldása áttranszformálható olyan alakra, ahol g a maximális tórusz eleme, így a továbbiakban elegendő a

$$J - \tau^{-1} J \tau = \mathrm{i}\, x (v v^\dagger - \mathbf{1}_n), \qquad |v|^2 = n, \qquad \tau \in \mathbb{T}(n) \tag{5.42}$$

egyenletet vizsgálnunk. Az (5.42) diagonális részének vizsgálatából a $|v_k| = 1$ feltétel adódik tetszőleges $k = 1, \ldots, n$ esetén, majd $\mathbb{T}(n)$ alkalmas elemének használatával v-t az (5.35) összefüggésben definiált $v = \hat{v}$ alakra tudjuk transzformálni. Az off-diagonális komponensek vizsgálatával az alábbi egyenlőségek adódnak

$$J_{ab}(1 - \tau_b/\tau_a) = \mathrm{i}\, x, \qquad \forall a \neq b. \tag{5.43}$$

A iménti összefüggések megoldhatóak τ-ra ($\tau \in \mathbb{T}^0$) és az így kapott megoldás pontosan megegyezik az (5.35) összefüggésben szereplő $J(\tau, p)$ definíciójával. Összefoglalva: Beláttuk, hogy a kényszerfelület tetszőleges pontja esetén található azzal mérték-ekvivalens pont, melyet egy alkalmas $\tau \in \mathbb{T}(n)^0$ és $p \in \mathbb{R}^n$ választáson keresztül az alábbi reláció jellemez

$$(g, J, \xi(x, v)) \simeq (\tau, J(\tau, p), \xi(x, \hat{v})). \tag{5.44}$$

A fent ismertetett megoldások pontosan az (5.35)-ben definiált F leképezés M^F képének felelnek meg. Megjegyezzük, hogy fennáll az

$$L_{\mathrm{Suth}}(q, p) = -\,\mathrm{i}\, e^{-\mathrm{i}\, q/2} J(e^{\mathrm{i}\, q}, p) e^{\mathrm{i}\, q/2} \tag{5.45}$$

egyenlőség.

Folytassuk a faktorizálást $\bar{G}$ azon $[y]$ elemeivel, melyek a momentum kényszer (5.44) alakú megoldásait azonos alakúra transzformálják, azaz

$$(y \tau y^{-1}, y J(\tau, p) y^{-1}, \xi(x, y\hat{v})) = (\tau', J(\tau', p'), \xi(x, \hat{v})). \tag{5.46}$$

Hasonlítsuk össze a fenti egyenlőség első komponenseit. Így leolvashatjuk, hogy teljesülnie kell az $y \tau y^{-1} = \tau'$ egyenlőségnek. Az imént elmondottakból következik, hogy, y a σT alakban írható, ahol σ egy G-beli permutáció mátrix és T eleme a $\mathbb{T}(n)$ maximális tórusznak. Az (5.46) harmadik komponensének vizsgálatából adódik, hogy T-nek meg kell egyeznie az egységelem konstans szorosával. Az első és második komponens további vizsgálatából a

$$\tau' = \sigma \tau \sigma^{-1} \equiv \sigma(\tau) \quad \text{és} \quad \sum_k p'_k E_{kk} = \sigma(\sum_k p_k E_{kk}) \sigma^{-1} \equiv \sum_{k=1}^n \sigma(p)_k E_{kk} \tag{5.47}$$

relációkra jutunk, azaz F egy $S(n)$-ekvivariáns bijekció $T^*\mathbb{T}(n)^0$ és M^F között. Könnyű ellenőrizni, hogy az $F^*(\Omega_M) = \Omega_{T^*\mathbb{T}(n)^0}$ is teljesül. Tehát beláttuk az F és M^F összes említett tulajdonságát.

A fentiekből világos, hogy $(\tau, J(\tau, p), \xi(x, \hat{v})) \in M^F$ izotrópia csoportja a $\bar{G}$ triviális részcsoportja. Ezáltal azt is beláttuk, hogy $\bar{G}$ szabadon hat M_0-on.

5.2.2. A trigonometrikus Sutherland modell Ruijsenaars duálisa

Az előző alfejezetben bebizonyítottuk, hogy az (5.33)-beli (P, ω) a $(T^*G)_{\rm red}$ redukált fázistér modelljeként tekinthető. A következőkben megkonstruáljuk a $(T^*G)_{\rm red}$ egy másik modelljét, ehhez az (5.41) momentum kényszer egy másik megoldását keressük meg. A Sutherland modellt tárgyaló alfejezetben a G csoport g elemét hoztuk diagonális alakra, a duális modell esetében pedig olyan mértéktranszformációt alkalmazunk, amely a $\mathcal{G}$ Lie-algebra J elemét hozza az alábbi diagonális alakra

$$J = -\,\mathrm{i}\ \mathrm{diag}(\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_n) := -\,\mathrm{i}\,\hat{p}, \quad \text{ahol} \quad \hat{p}_1 \geq \hat{p}_2 \geq \cdots \geq \hat{p}_n. \tag{5.48}$$

Az alfejezet végső eredményéhez több lépésben jutunk el. Mivel a gondolatmenetünk eléggé technikai, ezért ismertetését a matematikában szokásos módon tételek és lemmák használatával építjük fel.

1. Lemma. *Ha $(g, J, \xi(x, v))$ megoldja az (5.41) momentum kényszert (5.48) alakú J-re, akkor a következő összefüggések is teljesülnek*

$$\hat{p}_k - \hat{p}_{k+1} \geq |x|, \qquad \forall k = 1, \dots, (n-1), \tag{5.49}$$

és

$$|v_b|^2 = \prod_{k \neq b} \left[\frac{\hat{p}_b - \hat{p}_k - x}{\hat{p}_b - \hat{p}_k} \right], \qquad \forall b = 1, \dots, n. \tag{5.50}$$

Bizonyítás. A fenti állítások igazolásához, írjuk (5.41)-et a

$$g^{-1} \hat{p} g = x(vv^\dagger - \mathbf{1}_n) + \hat{p} \tag{5.51}$$

mérték-ekvivalens alakban. Majd írjuk fel az (5.51) egyenlet mindkét oldalának karakterisztikus polinomját. Így a

$$\prod_{j=1}^n (\hat{p}_j - \lambda) = \prod_{j=1}^n (\hat{p}_j - (\lambda + x)) + x \sum_{k=1}^n \Big(|v_k|^2 \prod_{j \neq k} (\hat{p}_j - (\lambda + x)) \Big) \tag{5.52}$$

egyenletre jutunk.

Tegyük fel, azt is hogy $\hat{p}$ reguláris, azaz

$$\hat{p}_1 > \hat{p}_2 > \cdots > \hat{p}_n, \tag{5.53}$$

majd értékeljük ki a karakterisztikus polinomokra vonatkozó (5.52) egyenlőséget a $\lambda = \hat{p}_b - x$ helyen. Ezzel azonnal beláttuk az (5.50) összefüggést. Az (5.50) és (5.53), valamint $|v_b|^2 \geq 0$ használatával a (5.49) „spektrálrés” feltétel levezethető (a részletes bizonyítás [22] egy hasonló problémára vonatkozó analízisét követheti).

Az (5.51)-nek létezik az (5.53) regularitási feltételt kielégítő megoldása, hiszen a

$$\hat{p}_k - \hat{p}_{k+1} = |x|, \qquad k = 1, \dots, n-1 \tag{5.54}$$

és

$$v_i = \delta_{n,i}\sqrt{n}, \quad g_{1,n} = g_{j,j-1} = 1 \quad (j = 2, \dots, n), \quad g_{a,b} = 0 \quad \text{különben} \quad \text{ha} \quad x > 0, \tag{5.55}$$

illetve

$$v_i = \delta_{1,i}\sqrt{n}, \quad g_{n,1} = g_{j,j+1} = 1 \quad (j = 1, \dots, n-1), \quad g_{a,b} = 0 \quad \text{különben} \quad \text{ha} \quad x < 0 \tag{5.56}$$

választás kielégíti (5.51)-et. Az iménti észrevételből és a kényszerfelület összefüggőségéből már következik, hogy az (5.21)-et kielégítő J-nek bármely két sajátértékének távolsága legalább $|x|$. Ezzel a kívánt állításokat beláttuk. ■

1. Definíció. *Jelölje $\bar{\mathfrak{C}}_x$ a (2.130) összefüggésben definiált $\mathfrak{C}_x$ lezártját, és vezessük be a $\bar{\mathfrak{C}}_x$-en értelmezett*

$$V(x,\hat{p})_b := \prod_{k\neq b}\left[\frac{\hat{p}_b - \hat{p}_k - x}{\hat{p}_b - \hat{p}_k}\right]^{\frac{1}{2}}, \qquad \forall b = 1, \dots, n \tag{5.57}$$

vektor és

$$\eta(x,\hat{p})_{ab} = \frac{x}{\hat{p}_b - \hat{p}_a}\prod_{j\neq a,b}\left[\frac{(\hat{p}_a - \hat{p}_j - x)(\hat{p}_j - \hat{p}_b - x)}{(\hat{p}_a - \hat{p}_j)(\hat{p}_j - \hat{p}_b)}\right]^{\frac{1}{2}}, \qquad a \neq b, \tag{5.58}$$

$$\eta(x,\hat{p})_{aa} = \prod_{j\neq a}\left[\frac{(\hat{p}_a - \hat{p}_j - x)(\hat{p}_j - \hat{p}_a - x)}{(\hat{p}_a - \hat{p}_j)(\hat{p}_j - \hat{p}_a)}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{5.59}$$

$n \times n$ mátrix értékű függvényt. A fenti összefüggésekben a négyzetgyök alatt álló kifejezések egyik esetben sem negatívak.

2. Lemma. *Az (5.41) momentum kényszernek tetszőleges $\hat{p} \in \bar{\mathfrak{C}}_x$ esetén létezik olyan megoldása, amely*

$$(g, J, \xi) \simeq (g, -\mathrm{i}\,\hat{p}, \xi(x, V(x,\hat{p}))) \tag{5.60}$$

alakban írható (itt felhasználtuk a $\hat{p} \simeq \mathrm{diag}(\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_n)$ jelölést).

Bizonyítás. Az állítás igazolásához tekintsünk egy tetszőlegesen választott $\hat{p}$-t $\bar{\mathfrak{C}}_x$-ből és jegyezzük meg, hogy (5.60)-ra a momentum kényszer a

$$g^{-1}\hat{p}g = x(V(x,\hat{p})V(x,\hat{p})^\dagger - \mathbf{1}_n) + \hat{p} \tag{5.61}$$

alakot ölti ($g \in U(n)$). Mivel az egyenlet mindkét oldala hermitikus, az egyenletet kielégítő g létezésének elégséges feltétele, hogy a jobb oldal $\mathcal{Q}_n(\lambda,\hat{p})$ karakterisztikus polinomja megegyezzen a bal oldal $\mathcal{P}_n(\lambda) := \prod_{j=1}^n(\hat{p}_j - \lambda)$ karakterisztikus polinomjával. A $V(x,\hat{p})$ definíciója garantálja a

$$(\mathcal{P}_n - \mathcal{Q}_n)(\lambda = \hat{p}_b - x, \hat{p}) = 0 \tag{5.62}$$

egyenlőség érvényességét tetszőleges $b = 1, \dots, n$-re. A definíciójukból láthatóan $\mathcal{P}_n - \mathcal{Q}_n$ egy n-nél alacsonyabb fokú polinom λ-ban, így azonnal adódik a $\mathcal{P}_n(\lambda,\hat{p}) = \mathcal{Q}_n(\lambda,\hat{p})$ egyenlőség. Ezzel igazoltuk az (5.60) megfelelő típusú megoldásának létezését. ■

3. Lemma. *Az (5.57)-beli $V(x,\hat{p})$ függvények eleget tesznek a*

$$\sum_{a=1}^{n} \frac{x}{\hat{p}_b - \hat{p}_a + x} V(x,\hat{p})_a^2 = 1, \quad \forall b = 1,\dots,n, \quad \forall \hat{p} \in \mathfrak{C}_x, \tag{5.63}$$

$$\sum_{a=1}^{n} V(x,\hat{p})_a^2 = n, \qquad \forall \hat{p} \in \bar{\mathfrak{C}}_x \tag{5.64}$$

összefüggéseknek. Az $\eta(x,\hat{p})$ függvények kielégítik az

$$\eta(x,\hat{p})_{ab} = \frac{xV(x,\hat{p})_a V(-x,\hat{p})_b}{\hat{p}_b - \hat{p}_a + x}, \qquad \forall a,b \quad ha \quad \hat{p} \in \mathfrak{C}_x, \tag{5.65}$$

$$\eta(x,\hat{p})^{-1} = \eta(x,\hat{p})^T = \eta(-x,\hat{p}), \quad \det(\eta(x,\hat{p})) = 1, \qquad \forall \hat{p} \in \bar{\mathfrak{C}}_x \tag{5.66}$$

egyenlőségeket.

Bizonyítás. Az (5.52) karakterisztikus polinomok kiértékeléséből $\lambda = \lambda_b$-ben azonnal adódik (5.63); (5.64)-et pedig megkapjuk az (5.51) egyenlet tr-e meghatározásából. Az $\eta(x,\hat{p})$ mátrix értékű függvény (5.65) és (5.66) tulajdonságai a Cauchy determináns formula következményei [54]. Az említett tulajdonságoknak köszönhetően igaz, hogy $\eta(x,\hat{p})$ eleme az $SO(n,\mathbb{R})$ csoportnak. ■

4. Lemma. *Az alábbi kifejezés az (5.41) momentum kényszer megoldása tetszőleges $\hat{p} \in \bar{\mathfrak{C}}_x$ esetén:*

$$(g, J, \xi) = (\eta(x,\hat{p})^{-1}, -\mathrm{i}\,\hat{p}, \xi(x, V(x,\hat{p}))). \tag{5.67}$$

Bizonyítás. Szorozzuk meg (5.51)-et jobbról g^{-1}-el és helyettesítsük be az (5.67) összefüggést, így a

$$\eta(x,\hat{p})_{ab}(\hat{p}_b - \hat{p}_a + x) = xV_a(x,\hat{p}) \sum_{c=1}^{n} V_c(x,\hat{p})\eta(x,\hat{p})_{cb}, \qquad \forall a,b \tag{5.68}$$

egyenlőségre jutunk. Amennyiben $\hat{p}$ a $\mathfrak{C}_x$ eleme, a fenti összefüggés mindkét oldala az alábbi kifejezéssel egyenlő

$$xV(x,\hat{p})_a V(-x,\hat{p})_b. \tag{5.69}$$

A függvények folytonossága garantálja, hogy az egyenlőség érvényes a $\bar{\mathfrak{C}}_x$ lezárt esetén is. ■

5. Lemma. *Felhasználva az 1. Definíciót és az (5.20) formulát vezessük be a*

$$K_x : \bar{G} \times \mathbb{T}(n) \times \bar{\mathfrak{C}}_x \to M \simeq U(n) \times u(n) \times \mathcal{O} \tag{5.70}$$

folytonos leképezést az alábbi definícióval

$$K_x([y], \mathcal{D}, \hat{p}) := A_{[y]}\big((\eta(x,\hat{p})\mathcal{D})^{-1}, -\mathrm{i}\,\hat{p}, \xi(x, V(x,\hat{p}))\big). \tag{5.71}$$

A K_x képe megegyezik az (5.22)-beli M_0 kényszerfelülettel. Megszorítva K_x-et $\bar{G} \times \mathbb{T}(n) \times \mathfrak{C}_x$-re síma, injektív leképezést kapunk, melynek képe M_0 sűrű, nyílt részsokasága.

Bizonyítás. Az 1. és 2. Lemmáknak köszönhetően M_0 minden eleme előáll

$$(g, -\mathrm{i}\,\hat{p}, \xi(x, V(x,\hat{p}))), \qquad \hat{p} \in \bar{\mathfrak{C}}_x \tag{5.72}$$

alakú elemek mértéktranszformáltjaként. Az eddigieket kombinálva a momentum kényszert

$$\mathrm{i}\,g^{-1}\hat{p}g = -\xi(x, V(x,\hat{p})) + \mathrm{i}\,\hat{p} \tag{5.73}$$

alakban írhatjuk, ahol g eleme $U(n)$-nek. A $\hat{p}$ regularitásából és a 4. Lemmából következik, hogy (5.73) pontosan akkor oldható meg, ha

$$g = (\eta(x,\hat{p})\mathcal{D})^{-1}, \quad \text{ahol} \quad \mathcal{D} \in \mathbb{T}(n). \tag{5.74}$$

A fenti érvelés igazolja, hogy K_x képe M_0. Könnyen látható az is, hogy K_x a $\bar{G} \times \mathbb{T}(n) \times \mathfrak{C}_x$-et az M_0 sűrű és nyílt részsokaságába képezi. A megszorított leképezés símasága a definiáló formulából azonnal látható. Az injektivitás belátásához először tegyük fel, hogy érvényes az alábbi egyenlőség

$$A_{[y]}\big((\eta(x,\hat{p})\mathcal{D})^{-1}, -\mathrm{i}\,\hat{p}, \xi(x, V(x,\hat{p}))\big) = A_{[w]}\big((\eta(x,\hat{p}')\mathcal{D}')^{-1}, -\mathrm{i}\,\hat{p}', \xi(x, V(x,\hat{p}'))\big), \tag{5.75}$$

ahol

$$([y], \mathcal{D}, \hat{p}) \in \bar{G} \times \mathbb{T}(n) \times \mathfrak{C}_x \ni ([w], \mathcal{D}', \hat{p}'). \tag{5.76}$$

Hasonlítsuk össze (5.75) második komponenseit. Így azonnal látható, hogy $\hat{p} = \hat{p}'$ és a

$$g_0 := w^{-1}y \in \mathbb{T}(n) \tag{5.77}$$

reláció is teljesül. Tekintsük (5.75) harmadik komponensét, ezzel a

$$g_0\xi(x, V(x,\hat{p}))g_0^{-1} = \xi(x, g_0V(x,\hat{p})) = \xi(x, V(x,\hat{p})) \tag{5.78}$$

egyenlőségre jutunk, azaz

$$g_0V(x,\hat{p}) = \gamma V(x,\hat{p}), \qquad \gamma \in U(1). \tag{5.79}$$

Vegyük észre, hogy $V(x,\hat{p})$ komponensei nem nullák, hiszen $\hat{p} \in \mathfrak{C}_x$, és így $g_0 = \gamma\mathbf{1}_n$ adódik. Ezután a kívánt állítás azonnal következik (5.75) első komponenséből. ■

Jelölje

$$M_0^0 \subset M_0 \tag{5.80}$$

azon (g, J, ξ) elemeket, melyek J komponense kielégíti a „szigorú” spektrálrés feltételt. Az M_0^0 olyan részsokasága M_0-nak, mely sűrű és nyílt, és $\bar{G}$ hatása nem vezet ki belőle. A K_x értékkészlete a $\bar{G} \times \mathbb{T}(n) \times \mathfrak{C}_x$ értelmezési tartomány esetén megegyezik M_0^0-al. A fentieknek megfelelően

$$M_0^0/\bar{G} \subset M_0/\bar{G} \tag{5.81}$$

sűrű, nyílt részsokasága a redukált fázistérnek.

6. Lemma. *Tekintsük az* $m_x : \mathbb{T}(n) \times \mathfrak{C}_x \to M$ *síma, injektív leképezést, melyet az*

$$m_x(\mathcal{D}, \hat{p}) := K_x([e], \mathcal{D}, \hat{p}) = ((\eta(x,\hat{p})\mathcal{D})^{-1}, -\mathrm{i}\,\hat{p}, \xi(x, V(x,\hat{p}))) \tag{5.82}$$

formula definiál. Az m_x *képe* M_0^0*-ban fekszik és minden* M_0^0*-beli* $\bar{G}$*-pályát pontosan egyszer metsz. Továbbá a (5.12)-beli* Ω_M *szimplektikus forma* m_x*-el való „visszahúzottjára" az alábbi egyenlőség teljesül*

$$m_x^*(\Omega_M) = -\mathrm{i}\,\mathrm{tr}\left(d\hat{p} \wedge (d\mathcal{D})\mathcal{D}^{-1}\right). \tag{5.83}$$

Bizonyítás. A leképezés símasága azonnal látható a definiáló formulából, az injektivitás az 5. Lemma következménye. Egyedül a (5.83) összefüggés ellenőrzése maradt hátra, ehhez tekintsük a $g := (\eta(x,\hat{p})\mathcal{D})^{-1}$-t és $J = -\mathrm{i}\,\hat{p}$-t. Az iménti g és J teljesíti az alábbi egyenlőséget:

$$\mathrm{tr}\left(J(dg)g^{-1}\right) = \mathrm{tr}\left(\mathrm{i}\,\hat{p}(d\mathcal{D})\mathcal{D}^{-1}\right), \tag{5.84}$$

hiszen $\eta(x,\hat{p})$ ortogonális mátrix és így nem ad „kereszttagot" $\hat{p}$-vel. Vegyük észre, azt is, hogy az Ω_M szimplektikus forma koadjungált pályához tartozó $\Omega_{\mathcal{O}}$ része nem ad járulékot $m_x^*(\Omega_M)$-hez. Utóbbi észrevétel a koadjungált pálya $\Omega_{\mathcal{O}}$ szimplektikus formáját definiáló (5.11) összefüggésből adódik. A $\mathbb{C}^n$ tisztán valós vektorokból álló részhalmazán $\Omega_{\mathcal{O}}$ eltűnik és $V(x,\hat{p})$ pontosan ebben a részhalmazban fekszik, így beláttuk (5.83)-at. ■

Legyen $\tau = \mathrm{diag}(\tau_1, \ldots, \tau_n) \in \mathbb{T}(n)$ esetén

$$\tau_{(x)} := \mathrm{diag}(\tau_2, \ldots, \tau_n, 1) \quad \text{ha} \quad x > 0, \quad \text{és} \quad \tau_{(x)} := \mathrm{diag}(1, \tau_1, \ldots, \tau_{n-1}) \quad \text{ha} \quad x < 0. \tag{5.85}$$

Legyen továbbá $\aleph(x, \cdot) : \mathbb{T}(n) \to \mathbb{T}(n)$ az alábbi összefüggéssel definiált bijekció

$$\aleph(x,\tau)_j := \prod_{k=j}^{n} \tau_k^{-1}, \quad x > 0 \quad \text{és} \quad \aleph(x,\tau)_j := \prod_{k=1}^{j} \tau_k^{-1}, \quad x < 0. \tag{5.86}$$

Könnyen ellenőrizhető a következő azonosság:

$$\aleph(x,\tau)(\aleph(x,\tau))_{(x)}^{-1} = \tau^{-1}, \qquad \forall \tau \in \mathbb{T}(n). \tag{5.87}$$

A 2.6 alfejezetben már ismertettük a a komplex racionális Ruijsennaars modell $(\hat{P}, \hat{\omega}, \hat{H}_{\mathrm{RS}})$ valós formáját. A Poisson kommutáló függvények az

$$\hat{L}(\hat{q}, \hat{p}) := \eta(x,\hat{p})e^{\mathrm{i}\,\hat{q}} \tag{5.88}$$

Lax mátrix spektrálinvariánsai (lásd: (5.58, 5.59)) és a rendszert jellemző Hamilton-függvény

$$\hat{H}_{\mathrm{RS}}(\hat{q}, \hat{p}) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\big(\hat{L}(\hat{q},\hat{p}) + \hat{L}(\hat{q},\hat{p})^{-1}\big). \tag{5.89}$$

Érdemes átfogalmazni a 6. Lemmát a fent bevezetett jelölések szerint.

1. Propozíció. *Tekintsük a (2.130) szerinti $(\hat{P},\hat{\omega})$-át és az (5.71)-beli K_x-et, ekkor a $k_x:\hat{P}\to M$ leképezés, melyet a*

$$k_x(e^{\mathrm{i}\hat{q}},\hat{p}):=K_x([\aleph(x,e^{\mathrm{i}\hat{q}})_{(x)}],e^{\mathrm{i}\hat{q}},\hat{p}) \tag{5.90}$$

egyenlőség definiál ugyanazon tulajdonságokkal rendelkezik mint a 6. Lemmában említett m_x. Többek között a $k_x^*(\Omega_M)=\hat{\omega}$ kapcsolat is fennáll. Így $(\hat{P},\hat{\omega})$ a redukált fázistér sűrű, nyílt $M_0^0/\bar{G}$ részsokaságának egy modellje. Továbbá ezen a részsokaságon az ábeli Poisson algebrát alkotó (5.15) $\{\hat{\mathcal{H}}_{\pm k}\}$ függvények redukált megfelelői megegyeznek az (5.88)-beli $\hat{L}(\hat{q},\hat{p})$ spektrálinvariánsaival. A teljesség kedvéért megjegyezzük, hogy a másik ábeli Poisson algebrát alkotó (5.14) $\{\mathcal{H}_k\}$ függvények redukált megfelelői a szimmetrikus polinomok a $\hat{p}$ „duális pozíció" változókban.

Bizonyítás. A 6. Lemma bizonyításából azonnal adódik a propozíció, hiszen m_x és k_x mérték-ekvivalensek. ■

A fenti eredmény jellemzi az $M_0^0/\bar{G}\subset M_0/\bar{G}$ részsokaságot. Ahhoz, hogy a redukált fázistér teljes leírásához jussunk meg kell konstruáljuk a csoport M_0-beli pályáinak egy globális szelését. Ezt a k_x leképezés kiterjesztésével érjük el, amit a következőkben ismertetünk. A tömörség érdekében most csak az

$$x>0 \tag{5.91}$$

esetben ismertetjük a gondolatmenetet.

Először is tekintsük a $(\hat{P}_c,\hat{\omega}_c)$ szimplektikus sokaságot, ahol

$$\hat{P}_c:=\mathbb{C}^{n-1}\times\mathbb{C}^\times,\qquad \hat{\omega}_c:=\frac{\mathrm{i}\,dZ\wedge d\bar{Z}}{2\bar{Z}Z}+\sum_{j=1}^{n-1}\mathrm{i}\,dz_j\wedge d\bar{z}_j,\quad Z\in\mathbb{C}^\times,\quad z\in\mathbb{C}^{n-1}. \tag{5.92}$$

Itt $\mathbb{C}^\times$ az origójától megfosztott komplex számsíkot jelöli. A [22, 44] referenciákat követve bevezetjük a $\mathcal{Z}_x:\hat{P}\equiv\mathbb{T}(n)\times\mathfrak{C}_x\to\hat{P}_c$ síma, injektív leképezést, melyet a

$$z_j(e^{\mathrm{i}\hat{q}},\hat{p}):=(\hat{p}_j-\hat{p}_{j+1}-x)^{\frac{1}{2}}\prod_{k=j+1}^{n}e^{-\mathrm{i}\hat{q}_k},\ j=1,...,n-1,\ Z(e^{\mathrm{i}\hat{q}},\hat{p}):=e^{-\hat{p}_1}\prod_{k=1}^{n}e^{-\mathrm{i}\hat{q}_k}, \tag{5.93}$$

egyenlőségek definiálnak. Jelölje $\tilde{\mathcal{Z}}_x:\mathbb{T}(n)\times\bar{\mathfrak{C}}_x\to\hat{P}_c$ a $\mathcal{Z}_x$ egyértelmű folytonos kiterjesztését. A $\tilde{\mathcal{Z}}_x$ szürjektív, de nem injektív leképezést. A

$$\hat{P}_c^0:=\mathcal{Z}_x(\hat{P})\subset\hat{P}_c \tag{5.94}$$

kép egy sűrű, nyílt részsokaság, melyet a $z_j\neq 0$ $(\forall j)$ feltételnek eleget tevő pontok alkotnak. A $\hat{\omega}_c$ szimplektikus forma eleget tesz a következő egyenlőségnek

$$\mathcal{Z}_x^*(\hat{\omega}_c)=\sum_{i=1}^{n}d\hat{p}_i\wedge d\hat{q}_i\equiv\hat{\omega}, \tag{5.95}$$

azaz $\mathcal{Z}_x$ egy szimplektomorfizmus $(\hat{P},\hat{\omega})$ és $(\hat{P}_c^0,\hat{\omega}_c)$ között.

Vezessük be a $\hat{\pi}_j(z,Z)$ függvényeket, valamint a $\vartheta(z,Z)$ mátrixértékű és a $\mathcal{V}(z,Z)$ vektorértékű függvényeket $\hat{P}_c$-n az alábbi definiáló relációkkal

$$\hat{\pi}_j(z(e^{\mathrm{i}\hat{q}},\hat{p}),Z(e^{\mathrm{i}\hat{q}},\hat{p}))=\hat{p}_j, \tag{5.96}$$

$$\mathcal{V}(z(e^{\mathrm{i}\hat{q}},\hat{p}),Z(e^{\mathrm{i}\hat{q}},\hat{p}))=\aleph(x,e^{\mathrm{i}\hat{q}})_{(x)}V(x,\hat{p}), \tag{5.97}$$

$$\vartheta(z(e^{\mathrm{i}\hat{q}},\hat{p}),Z(e^{\mathrm{i}\hat{q}},\hat{p}))=\aleph(x,e^{\mathrm{i}\hat{q}})_{(x)}\left(\eta(x,\hat{p})e^{\mathrm{i}\hat{q}}\right)\aleph(x,e^{\mathrm{i}\hat{q}})_{(x)}^{-1}. \tag{5.98}$$

A fenti formulákban felhasználtuk az (5.85) és (5.86) összefüggésekben adott jelöléseket. Az (5.98) jól definiált minden $(e^{\mathrm{i}\hat{q}}, \hat{p}) \in \mathbb{T}(n) \times \bar{\mathfrak{C}}_x$ esetén. Explicit számolással ellenőrizhető $\hat{\pi}_j$, $\mathcal{V}$ és ϑ folytonossága is.

Ezen a ponton célszerű néhány további jelölést bevezetni az (5.96-5.98) függvények explicit megadásához. Jegyezzük meg, hogy a (z, Z) és a $\hat{\pi}$ függvények között a

$$\hat{\pi}_1(z, Z) = -\log|Z|, \quad \hat{\pi}_k(z, Z) = -(k-1)x - \log|Z| - \sum_{j=1}^{k-1} |z_j|^2, \quad k = 2, \ldots, n \tag{5.99}$$

kapcsolat teljesül. Ezután vezessük be az alábbi segédmennyiségeket:

$$Q_{j,k} := \left[\frac{\hat{\pi}_j - \hat{\pi}_k - x}{\hat{\pi}_j - \hat{\pi}_k}\right]^{\frac{1}{2}}, \qquad \forall j \neq k \in \{1, \ldots, n\}. \tag{5.100}$$

Az (5.49) spektrálrés feltételnek köszönhetően itt minden négyzetgyök alatti kifejezés nemnegatív és a törtek nevezői nem-eltűnőek. A $Q_{j,k}$ függvények könnyen kifejezhetőek a $\hat{\pi}_i$-ken keresztül Z és z_i-k abszolút értékeivel. A teljes $\hat{P}_c$-n fennáll a

$$Q_{j,k} > 0 \quad \text{ha} \quad k - j \neq 1 \tag{5.101}$$

reláció. Az (5.97) egyenletből azonnal adódnak a

$$\mathcal{V}_j = \frac{z_j}{\sqrt{|z_j|^2 + x}} \prod_{k \neq j, j+1} Q_{j,k}, \quad j = 1, \ldots, n-1 \quad \text{és} \quad \mathcal{V}_n = \prod_{k \neq n} Q_{n,k} \tag{5.102}$$

egyenlőségek. A $\vartheta(z, Z)$-t jellemző mátrixelemeket az alábbi formulákban soroljuk fel

$$\vartheta_{i,i+1} = \frac{x}{\hat{\pi}_{i+1} - \hat{\pi}_i} \prod_{j \neq i, i+1} (Q_{i,j}\, Q_{j,i+1}), \qquad i = 1, \ldots, n-1, \tag{5.103}$$

$$\vartheta_{n,1} = \frac{x}{\hat{\pi}_1 - \hat{\pi}_n} \frac{\bar{Z}}{|Z|} \prod_{j \neq 1, n} (Q_{n,j}\, Q_{j,1}), \tag{5.104}$$

$$\vartheta_{n,k} = \frac{x}{\hat{\pi}_k - \hat{\pi}_n} \frac{\bar{z}_{k-1} Q_{n,k-1}}{\sqrt{|z_{k-1}|^2 + x}} \prod_{j \neq k-1, k, n} (Q_{n,j}\, Q_{j,k}), \qquad k \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{1, n-1, n\}, \tag{5.105}$$

$$\vartheta_{k,1} = \frac{x}{\hat{\pi}_1 - \hat{\pi}_k} \frac{z_k Q_{k+1,1}}{\sqrt{|z_k|^2 + x}} \frac{\bar{Z}}{|Z|} \prod_{j \neq 1, k, k+1} (Q_{k,j}\, Q_{j,1}), \qquad k = 2, \ldots, n-1, \tag{5.106}$$

$$\vartheta_{k,k} = \frac{z_k}{\sqrt{|z_k|^2 + x}} \frac{\bar{z}_{k-1}}{\sqrt{|z_{k-1}|^2 + x}} \Big(\prod_{j \neq k, k+1} Q_{k,j}\Big)\Big(\prod_{l \neq k-1, k} Q_{l,k}\Big), \qquad k = 2, \ldots, n-1, \tag{5.107}$$

$$\vartheta_{1,1} = \frac{z_1 \bar{Z}}{|Z|} \frac{\sqrt{|z_1|^2 + 2x}}{|z_1|^2 + x} \prod_{j=3}^{n} (Q_{1,j} Q_{j,1}), \quad \vartheta_{n,n} = \bar{z}_{n-1} \frac{\sqrt{|z_{n-1}|^2 + 2x}}{|z_{n-1}|^2 + x} \prod_{j=1}^{n-2} (Q_{n,j}\, Q_{j,n}), \tag{5.108}$$

végül

$$\vartheta_{a,b} = \frac{z_a}{\sqrt{|z_a|^2 + x}} \frac{\bar{z}_{b-1}}{\sqrt{|z_{b-1}|^2 + x}} \frac{x Q_{a,b-1}\, Q_{a+1,b}}{\hat{\pi}_b - \hat{\pi}_a} \prod_{j \neq a, a+1, b-1, b} (Q_{a,j}\, Q_{j,b}), \tag{5.109}$$

ahol az indexek eleget tesznek a $1 \leq a, b \leq n$ és $a \neq b$, $b \neq a+1$, $a \neq n$, $b \neq 1$ feltételeknek.

Gondolatmenetünket az $\hat{\mathcal{I}} : \hat{P}_c \to M_0$ síma leképezés bevezetésével folytatjuk, melyet az

$$\hat{\mathcal{I}}(z, Z) := (\vartheta(z, Z)^{-1}, -\mathrm{i}\,\hat{\pi}(z, Z), \xi(x, \mathcal{V}(z, Z))) \tag{5.110}$$

formula definiál. Az (5.110) definíciót az alábbi reláció motiválja

$$\hat{\mathcal{I}} \circ \mathcal{Z}_x = k_x. \tag{5.111}$$

Az $\hat{\mathcal{I}}$ függvény a $k_x \circ \mathcal{Z}_x^{-1}$ egyértelmű kiterjesztése $\hat{P}_c$-re ($k_x \circ \mathcal{Z}_x^{-1} : \hat{P}_c^0 \to M_0$). Továbbá az $\hat{\mathcal{I}}$ rendelkezik az alábbi tulajdonsággal is

$$\hat{\mathcal{I}}(z(e^{\mathrm{i}\hat{q}}, \hat{p}), Z(e^{\mathrm{i}\hat{q}}, \hat{p})) = K_x([\aleph(x, e^{\mathrm{i}\hat{q}})_{(x)}], e^{\mathrm{i}\hat{q}}, \hat{p}) \qquad \forall (e^{\mathrm{i}\hat{q}}, \hat{p}) \in \mathbb{T}(n) \times \bar{\mathfrak{C}}_x. \tag{5.112}$$

Idézzük fel az (5.90) összefüggést és vegyük észre, hogy (5.111) az (5.112) megszorítása a $\mathbb{T}(n) \times \mathfrak{C}_x$ sűrű nyílt halmazra.

1. Tétel. *Tekintsük az (5.92)-ben definiált $(\hat{P}_c, \hat{\omega}_c)$ szimplektikus sokaságot és az (5.110) összefüggésben ismertetett $\hat{\mathcal{I}} : \hat{P}_c \to M_0$ leképezést (definíciójukban felhasználtuk az (5.99-5.109) jelöléseket). Ekkor $\hat{\mathcal{I}}$ az $M_0 = \Phi^{-1}(0)$ kényszerfelületbeli pályák egy síma, globális szelését adja, amelyre teljesül*

$$\hat{\mathcal{I}}^*(\iota_0^*(\Omega_M)) = \hat{\omega}_c, \tag{5.113}$$

ahol $\iota_0 : M_0 \to M$ a természetes beágyazás. Így $(\hat{P}_c, \hat{\omega}_c)$ a redukált fázistér egy modellje.

Bizonyítás. Elevenítsük fel, hogy $\mathcal{Z}_x(\hat{P}) = \hat{P}_c^0$ sűrű részsokaság $\hat{P}_c$-ben. Az 1. Propozícióban említett $k_x^*(\Omega_M) = \hat{\omega}$ tulajdonságból és az (5.95), (5.111) összefüggésekből azonnal adódik a „visszahúzottra" az (5.113) egyenlőség. Az (5.112) tulajdonság és az 5. Lemma következménye, hogy $\hat{\mathcal{I}}$ képe minden kényszerfelületbeli pályát metsz.

A tétel igazolásához már csak azt kell belátnunk, hogy $\hat{\mathcal{I}}$ injektív és a képterében nincsenek mérték-ekvivalens pontok. Ehhez a következő állítást kell belássuk:

$$A_{[h]}(\hat{\mathcal{I}}(z, Z)) = \hat{\mathcal{I}}(z', Z') \Longrightarrow h = \gamma \mathbf{1}_n \, (\gamma \in U(1)),\ z = z',\ Z = Z'. \tag{5.114}$$

Az állítás az alábbi tulajdonságok következménye:

1. A $|Z|$, $|z_i|$ abszolút értékek egy-egyértelmű kapcsolatban állnak $\hat{\pi}_j$-vel.

2. $\vartheta_{i,i+1}(z, Z) < 0$ tetszőleges $i = 1, \ldots, n-1$ esetén és csak a Z és z_j abszolút értékeitől függ.

3. $\mathcal{V}_n(z, Z) > 0$, és csak Z, z_j abszolút értékeitől függ.

4. $\mathcal{V}_j(z, Z) = z_j f_j(z, Z)$, alakban írható $j = 1, \ldots, n-1$ esetén, ahol $f_j(z, Z) > 0$ és f_j csak Z, valamint z_k abszolút értékeinek függvénye.

5. $\vartheta_{n,1}(z, Z) = \bar{Z} f(z, Z)$, ahol $f(z, Z) > 0$. Az f csak Z és z_k abszolút értékeitől függ.

Az 1. tulajdonság azonnal adódik az (5.99) egyenletből. Az (5.102) vizsgálatával az 3. és 4. tulajdonságokat kapjuk. A 3. tulajdonság az (5.101), míg az 5. tulajdonság az (5.104) egyenlet következménye.

Most tegyük fel, hogy teljesül az

$$A_{[h]}(\hat{\mathcal{I}}(z,Z)) = \hat{\mathcal{I}}(z',Z') \tag{5.115}$$

egyenlőség. Ekkor a második komponensek összehasonlításából a $h\hat{\pi}(z,Z)h^{-1} = \hat{\pi}(z',Z')$ összefüggést kapjuk. Mivel $\hat{\pi}(z,Z)$ és $\hat{\pi}(z',Z')$ reguláris elemek ugyanabban a Weyl kamrában azonnali következményként kapjuk, hogy h eleme $\mathbb{T}(n)$-nek, továbbá $\hat{\pi}(z,Z) = \hat{\pi}(z',Z')$. Az 1. tulajdonság igazolja, hogy $|Z| = |Z'|$, és $|z_j| = |z'_j|$ tetszőleges $j = 1,\dots,n-1$. esetén. Az (5.115) első komponenséből $h\vartheta(z,Z)h^{-1} = \vartheta(z',Z')$ egyenlőségre jutunk. Az $i, i+1$ komponensek vizsgálatából és 2. tulajdonság felhasználásából látható, hogy $h = \gamma\mathbf{1}_n$ alakú, ahol $\gamma \in U(1)$. Az eddigiek szerint a harmadik komponens a $\xi(x,\mathcal{V}(z,Z)) = \xi(x,\mathcal{V}(z',Z'))$ relációnak tesz eleget. A 3. tulajdonság miatt, ebből a $\mathcal{V}(z,Z) = \mathcal{V}(z',Z')$ egyenlőségre jutunk. Végül a 4. tulajdonság a $z_j = z'_j$, míg az 5. tulajdonság az $Z = Z'$ egyenlőséget eredményezi. ■

Eddigi eredményeink alapján élhetünk a következő definícióval.

2. Definíció. *Az (5.33)-(5.34) Sutherland modell Ruijsenaars duálisa az az integrálható rendszer, melynek fázistere az (5.92)-beli $(\hat{P}_c, \hat{\omega}_c)$ és Poisson kommutáló Hamilton-függvényei az (5.98)-beli $\vartheta(z,Z)$ Lax mátrix spektrálinvariánsai.*

A 1. Propozíciónak köszönhetően a fent definiált rendszer természetes kiterjesztése a $(\hat{P},\hat{\omega})$ fázistéren élő (5.88) $\hat{L}(\hat{q},\hat{p})$ Lax mátrixú (lokális) racionális Ruijsenaars–Schneider modellnek. A fenti gondolatmenet konzisztens a a [44] cikkben ismertetett szimplektikus redukciós technika nélküli számolás eredményeivel.

5.2.3. Dualitási transzformáció

Ezen a ponton érdemes összefoglalni az eddig kialakult képet. Először is idézzük fel az 5.1 fejezetből, hogy a szimplektikus redukció eredményélül a $((T^*G)_{\text{red}}, \Omega_{\text{red}})$ redukált fázisteret kapjuk, amin természetes módon adódik a kommutáló Hamilton-függvények (5.24) összefüggésben ismertetett $\{H_k\}$ és $\{\hat{H}_{\pm k}\}$ családja. Az (5.24) folyamai a megfelelő „szabad folyamok" projekcióiként adódnak. Ez az állítás nem tüntet ki semmiféle koordinátarendszert vagy modellt ($(T^*G)_{\text{red}}$ az $M_0/\bar{G}$ pályák tere).

Az 5.2.1 fejezetben megkonstruáltuk a redukált fázistér első modelljét, nevezetesen $(P,\omega) \equiv (T^*Q(n), \Omega_{T^*Q(n)})$-t. A redukált fázistér P modelljén értelmezett függvényként tekintve a $\{H_k\}$ családot a Sutherland modell kommutáló Hamilton-függvényeit kapjuk, míg a $\{\hat{H}_{\pm k}\}$ család a Sutherland pozíció változók $S(n)$-invariáns trigonometrikus polinomait adja $\mathbb{T}(n)^0$-n (idézzük fel, hogy teljesül a $Q(n) = \mathbb{T}(n)^0/S(n)$ összefüggés). Ez utóbbi függvények egyértelműen meghatározzák a $Q(n)$ értékű pozíció változókat.

Az 5.2.2 fejezetben megkonstruáltuk a redukált fázistér második modelljét, konkrétan $(\hat{P}_c, \hat{\omega}_c)$-t. Ezen a modellen a $\{\hat{H}_{\pm k}\}$ család adja a kommutáló Hamilton-függvényeket. A redukált fázistér $\hat{P}_c$ modelljéhez tartozó integrálható rendszert a Sutherland modell Ruijsenaars duálisának nevezzük. Ez a duális rendszer a (2.130)-beli $\hat{P} \simeq \hat{P}_c^0$ fázistéren értelmezett az (5.89)-beli $\hat{H}_{\mathrm{RS}}$ Hamilton-függvénnyel definiált racionális Ruijsenaars–Schneider modell kiterjesztése $\hat{P}_c$-re (az (5.94) összefüggés szerint fennáll $\hat{P}_c^0 \subset \hat{P}_c$). A $\hat{P}_c$-n értelmezett függvényként tekintve a $\{H_k\}$ család a kiterjesztett Ruijsenaars–Schneider modell $\hat{\pi}_j \in C^\infty(\hat{P}_c)$ $(j = 1, \ldots, n)$ pozíció változóinak szimmetrikus függvényeit adja.

A szimmetria redukciós konstrukciónak köszönhetően a redukált fázistér két modellje között értelmezett

$$\mathcal{R} : P \to \hat{P}_c \tag{5.116}$$

szimplektomorfizmus természetes módon adódik. Az $\mathcal{R}$ átképezi a $(T^*G)_{\mathrm{red}}$ tetszőleges pontjának „Sutherland reprezentánsát” a megfelelő „Ruijsenaars reprezentánsba”. Az $\mathcal{R}$ leképezés mértéktranszformációkkal hat, hiszen a geometriai képünknek megfelelően $\hat{P}_c$ felfogható az M_0 egy globális szeléseként és P tekinthető az M_0 egy $S(n)$ struktúra csoportú résznyalábjának bázisaként. A $\hat{\pi}_j \circ \mathcal{R} \in C^\infty(P)$ függvények definiálják a Sutherland modell hatásváltozóit. Elevenítsük fel, hogy az $M_0^0 \subset M_0$ részsokaságon teljesül a szigorú spektrál-rés feltétel. Szorítkozzunk erre a részsokaságra. Ekkor a $\hat{q}_j \circ \mathcal{Z}_x^{-1} \circ \mathcal{R}$ függvények definiálják a Sutherland hatásváltozóknak megfelelő kanonikusan konjugált mennyiségeket. Hasonló módon a $q_j \circ \mathcal{R}^{-1}$ Sutherland pozíció változók trigonometrikus szimmetrikus polinomjai a duális modell hatásváltozói. Az említett hatásváltozók jól definiáltak, mivel érvényes a $Q(n) = \mathbb{T}(n)^0/S(n)$ reláció.

A P és $\hat{P}_c$ közti dualitási transzformáció említett tulajdonságai először [44] cikkben kerültek leírásra. Az ismertetett geometriai konstrukció eredményéül kapott, (5.116)-ban szereplő $\mathcal{R}$ leképezés pontosan megegyezik a [44] hatás-szög leképezésével. A két konstrukció közti hasonlóság, hogy mindkettő diagonalizáción alapszik. A [44] referenciában Ruijsenaars a Sutherland Lax mátrixot diagonalizálja. Az általunk ismertetett gondolatmenetben pedig a $(g, J, \xi) \in M_0$ hármas J elemét diagonalizáljuk. A két tárgyalás között az (5.45) és (5.35) formulák létesítenek kapcsolatot. Az ismertetett gondolatmenet alapján először az $\mathcal{R}$ és a [44] hatás-szög leképezés azonossága látható be a $(T^*G)_{\mathrm{red}}$ redukált fázistér sűrű, nyílt M_0^0-hoz tartozó (5.81) részsokaságán. Az azonosság globálisan is igaz, hiszen $\hat{P}$ (5.94)-beli általunk használt beágyazása $\hat{P}_c$-be megegyezik a [44] cikkben használttal. A csoportelméleti megközelítés alkalmazásának fő előnye abban áll, hogy az $\mathcal{R}$ leképezés szimplektikussága automatikusan teljesül. A „szabad Hamilton-függvények” (5.16) és (5.18) folyamainak projekcióiból a [44]-ban tárgyaltal azonos megoldási algoritmusok adódnak. A „szabad folyamok” projekció teljesek $(T^*G)_{\mathrm{red}}$-n. Beláttuk, hogy $M_0^0/\bar{G}$ invariáns az (5.16) folyamok projekcióira nézve. Az (5.17) „duális folyamok” projekciói viszont csak a teljes $M_0/\bar{G}$ redukált fázistéren teljesek.

5.3. Fedőleképezések és dualitások

Az eddigi gondolatmenetünkkel geometriai nézőpontból írtuk le az (5.6) diagramm legalsó nyilának megfelelő szimplektomorfizmust. Ebben az alfejezetben ismertetjük a diagrammon látható többi fedőleképezést és dualitási transzformációt.

5.3.1. Diszkrét szimmetriák és fedőleképezések a redukció előtt

Először is vezessük be a redukálatlan fázisterekre az

$$M_2 := T^*(\mathbb{R} \times SU(n)) \times \mathcal{O} = T^*\mathbb{R} \times T^*SU(n) \times \mathcal{O} \tag{5.117}$$

és az

$$M_1 := T^*(U(1) \times SU(n)) \times \mathcal{O} = T^*U(1) \times T^*SU(n) \times \mathcal{O}, \tag{5.118}$$

jelöléseket, valamint legyen $M = T^*U(n) \times \mathcal{O}$ a már korábban tanulmányozott fázistér. A $T^*U(n)$ koérintő nyalábhoz hasonló módon használjuk a

$$T^*SU(n) \simeq SU(n) \times su(n) = \{(\Gamma, \mathcal{J})\}, \quad \Omega_{T^*SU(n)} = -d\mathrm{tr}(\mathcal{J} d\Gamma\Gamma^{-1}) \tag{5.119}$$

paraméterezést. A későbbiekben alkalmazzuk az $T^*\mathbb{R} = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ és $T^*U(1) = U(1)\times\mathbb{R}$ azonosításokat. Így az (M_2, Ω_{M_2}) szimplektikus sokaságot az

$$\begin{aligned} &M_2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times SU(n) \times su(n) \times \mathcal{O} = \{(u_0, w_0, \Gamma, \mathcal{J}, \xi)\}, \\ &\Omega_{M_2} = dw_0 \wedge du_0 - d\mathrm{tr}(\mathcal{J} d\Gamma\Gamma^{-1}) + \Omega_{\mathcal{O}}(\xi), \end{aligned} \tag{5.120}$$

míg (M_1, Ω_{M_1})-et

$$\begin{aligned} &M_1 = U(1) \times \mathbb{R} \times SU(n) \times su(n) \times \mathcal{O} = \{(\zeta_0, v_0, \Gamma, \mathcal{J}, \xi)\}, \\ &\Omega_{M_1} = dv_0 \wedge \frac{d\zeta_0}{\mathrm{i}\,\zeta_0} - d\mathrm{tr}(\mathcal{J} d\Gamma\Gamma^{-1}) + \Omega_{\mathcal{O}}(\xi) \end{aligned} \tag{5.121}$$

összefüggések írják le. A teljesség kedvéért felelevenítjük, hogy

$$\begin{aligned} &M = T^*U(n) \times \mathcal{O} = U(n) \times u(n) \times \mathcal{O} = \{(g, J, \xi)\}, \\ &\Omega_M = -d\mathrm{tr}(J dg g^{-1}) + \Omega_{\mathcal{O}}(\xi). \end{aligned} \tag{5.122}$$

A $\mathbb{Z}$ Ábel-csoport szimplektikusan hat az M_2-n. Ezt a csoporthatást az $1 \in \mathbb{Z}$ elem

$$\theta(1) : (u_0, w_0, \Gamma, \mathcal{J}, \xi) \mapsto (u_0 - \frac{2\pi}{n}, w_0, e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}}\Gamma, \mathcal{J}, \xi) \tag{5.123}$$

hatása generálja. Ezután tekintsük a $\mathbb{Z}$ csoport $n\mathbb{Z}$ részcsoportját. A részcsoport hatását a

$$\theta(1)^n : (u_0, w_0, \Gamma, \mathcal{J}, \xi) \mapsto (u_0 - 2\pi, w_0, \Gamma, \mathcal{J}, \xi) \tag{5.124}$$

leképezés generálja. A $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ csoport (ami felfogható a komplex egységgyökök multiplikatív csoportjaként is) szimplektikus módon hat az M_1-en. Az n-edik primitív egységgyök az alábbi módon hat:

$$\alpha(e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}}) : (\zeta_0, v_0, \Gamma, \mathcal{J}, \xi) \mapsto (e^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}}\zeta_0, v_0, e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}}\Gamma, \mathcal{J}, \xi). \tag{5.125}$$

Tekintsük (5.1)-ban definiált G_2 és G_1 csoportok

$$\begin{aligned} &\{(-k\frac{2\pi}{n}, e^{\mathrm{i}k\frac{2\pi}{n}}\mathbf{1}_n) \in \mathbb{R} \times SU(n) \,|\, k \in \mathbb{Z}\} < G_2, \\ &\{(e^{-\mathrm{i}k\frac{2\pi}{n}}, e^{\mathrm{i}k\frac{2\pi}{n}}\mathbf{1}_n) \in U(1) \times SU(n) \,|\, k = 0, 1, \dots, n-1\} < G_1 \end{aligned} \tag{5.126}$$

centrális részcsoportjait. A $\theta(1)$ által generált $\mathbb{Z}$ és az $\alpha(e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}})$ által generált $\mathbb{Z}_n$ Ábel-csoportok hatásai a (5.126) centrális részcsoportok természetes hatásainak koérintő liftjeiként adódnak. A megfelelő réscsoportokkal történő faktorizálások az

$$M_1 \simeq M_2/n\mathbb{Z}, \quad M \simeq M_2/\mathbb{Z} \simeq (M_2/n\mathbb{Z})/(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \simeq M_1/\mathbb{Z}_n \tag{5.127}$$

azonosításokhoz vezetnek. Az azonosításokat alkalmas

$$\psi_2 : M_2 \to M_1, \quad \psi_1 : M_1 \to M, \quad \psi := \psi_1 \circ \psi_2 : M_2 \to M \tag{5.128}$$

projekciók bevezetésével végezhetjük el, amik a fentebb bevezetett paraméterezések felhasználásával az alábbi alakban írhatók:

$$\psi_2 : (u_0, w_0, \Gamma, \mathcal{J}, \xi) \mapsto (e^{\mathrm{i}u_0}, w_0, \Gamma, \mathcal{J}, \xi), \quad \psi_1 : (\zeta_0, v_0, \Gamma, \mathcal{J}, \xi) \mapsto (\zeta_0\Gamma, \mathcal{J} + \frac{\mathrm{i}}{n}v_0\mathbf{1}_n, \xi). \tag{5.129}$$

Az (5.127) és (5.128) szimplektikus fedőleképezéseket definiálnak, azaz teljesülnek az alábbi összefüggések

$$\psi_2^*(\Omega_{M_1}) = \Omega_{M_2} \quad \text{és} \quad \psi_1^*(\Omega_M) = \Omega_{M_1}. \tag{5.130}$$

Az M_1-en és M_2-n a kommutáló Hamilton-függvények az (5.14)-beli $\{\mathcal{H}_k\}$ és (5.15)-beli $\{\hat{\mathcal{H}}_{\pm k}\}$ Poisson kommutáló függvények alkalmas „visszahúzottjaiként" adódnak. Konkrétan ezek

$$\mathcal{H}_j^1 := \mathcal{H}_j \circ \psi_1, \ \hat{\mathcal{H}}_{\pm k}^1 := \hat{\mathcal{H}}_{\pm k} \circ \psi_1 \quad \text{és} \quad \mathcal{H}_j^2 := \mathcal{H}_j \circ \psi, \ \hat{\mathcal{H}}_{\pm k}^2 := \hat{\mathcal{H}}_{\pm k} \circ \psi \tag{5.131}$$

alakban adódnak. Az előző gondolatmenetből látjuk, hogy a diszkrét szimmetriák jelentik a kapcsolatot az M_2, M_1, M fázisterek és kommutáló Hamilton-függvényeik közt.

5.3.2. $\bar{G}$-szimmetria és KKS redukció

Az 5.2 fejezetben az M redukciójához a $\bar{G} = U(n)/U(1)$ csoportot használtuk fel. Idézzük fel, hogy minden $\bar{G}$-beli $[y]$ elem reprezentálható, alkalmas $y \in SU(n)$ segítségével. Ekkor a $\bar{G}$ csoport $A_{[y]} : M \to M$ hatása és $\Phi : M \to su(n) \simeq \mathrm{Lie}(\bar{G})^*$ momentum leképezése az

$$A_{[y]}(g, J, \xi) = (ygy^{-1}, yJy^{-1}, y\xi y^{-1}), \quad \Phi(g, J, \xi) = J - g^{-1}Jg + \xi \tag{5.132}$$

alakot ölti. Az (5.132) hatás felemeltjét, valamint a felemelt hatást generáló momentum leképzést az M_2 és M_1 fázistereken az

$$A^2_{[y]}(u_0, w_0, \Gamma, \mathcal{J}, \xi) = (u_0, w_0, y\Gamma y^{-1}, y\mathcal{J}y^{-1}, y\xi y^{-1}), \quad \Phi_2(u_0, w_0, \Gamma, \mathcal{J}, \xi) = \mathcal{J} - \Gamma^{-1}\mathcal{J}\Gamma + \xi \tag{5.133}$$

és

$$A^1_{[y]}(\zeta_0, v_0, \Gamma, \mathcal{J}, \xi) = (\zeta_0, v_0, y\Gamma y^{-1}, y\mathcal{J}y^{-1}, y\xi y^{-1}), \quad \Phi_1(\zeta_0, v_0, \Gamma, \mathcal{J}, \xi) = \mathcal{J} - \Gamma^{-1}\mathcal{J}\Gamma + \xi \tag{5.134}$$

formulák írják le. A $\bar{G}$ hatása triviális a $T^*\mathbb{R}$ és a $T^*U(1)$ faktorokban is. A megfelelő momentum értékeket nullára rögzítve a redukció eredményéül adódó redukált fázisterek a következők:

$$(T^*G_2)_{\mathrm{red}} := \Phi_2^{-1}(0)/\bar{G} = T^*\mathbb{R} \times (T^*SU(n))_{\mathrm{red}}, \tag{5.135}$$

$$(T^*G_1)_{\rm red} := \Phi_1^{-1}(0)/\bar{G} = T^*U(1) \times (T^*SU(n))_{\rm red}, \tag{5.136}$$

ahol

$$T^*SU(n)_{\rm red} := (T^*SU(n) \times \mathcal{O})//_0\bar{G}. \tag{5.137}$$

Az előző alfejezetben bemutatott diszkrét szimmetriák kommutálnak a $\bar{G}$ hatásával, azaz

$$A^2_{[y]} \circ \theta(1) = \theta(1) \circ A^2_{[y]}, \quad A^1_{[y]} \circ \alpha(e^{\mathrm{i}\,\frac{2\pi}{n}}) = \alpha(e^{\mathrm{i}\,\frac{2\pi}{n}}) \circ A^1_{[y]}, \tag{5.138}$$

$$\Phi_2 \circ \theta(1) = \Phi_2, \quad \Phi_1 \circ \alpha(e^{\mathrm{i}\,\frac{2\pi}{n}}) = \Phi_1. \tag{5.139}$$

Továbbá teljesülnek az alábbi összefüggések is

$$\psi_2 \circ A^2_{[y]} = A^1_{[y]} \circ \psi_2, \quad \psi_1 \circ A^1_{[y]} = A_{[y]} \circ \psi_1, \quad \psi \circ A^2_{[y]} = A_{[y]} \circ \psi. \tag{5.140}$$

A fenti relációk következtében nem számít, hogy először a diszkrét redukciót végezzük el ($\mathbb{Z}$, $n\mathbb{Z}$ vagy $\mathbb{Z}_n$ hatása segítségével) és azután a KKS redukciót (a $\bar{G}$ hatással) vagy fordított sorrendben járunk el, a végső eredmény mindkét esetben ugyanaz lesz. Más szavakkal azt mondhatjuk, hogy rendelkezünk $\mathbb{Z}$-nek (és $n\mathbb{Z}$-nek) egy természetes hatásával a $(T^*G_2)_{\rm red}$ redukált fázistéren, továbbá $\mathbb{Z}_n$ természetes hatásával a $(T^*G_1)_{\rm red}$-en, melyet a

$$\theta(1)_{\rm red} : (T^*G_2)_{\rm red} \to (T^*G_2)_{\rm red} \quad \text{és} \quad \alpha(e^{\mathrm{i}\,\frac{2\pi}{n}})_{\rm red} : (T^*G_1)_{\rm red} \to (T^*G_1)_{\rm red} \tag{5.141}$$

összefüggések írnak le. Az fenti hatások a következő azonosításokhoz vezetnek

$$\begin{aligned} &(T^*G_1)_{\rm red} \simeq (T^*G_2)_{\rm red}/n\mathbb{Z}, \\ &(T^*G)_{\rm red} \simeq (T^*G_2)_{\rm red}/\mathbb{Z} = ((T^*G_2)_{\rm red}/n\mathbb{Z})/(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = (T^*G_1)_{\rm red}/\mathbb{Z}_n. \end{aligned} \tag{5.142}$$

Az iménti azonosítások (5.127) következményei, hiszen a diszkrét szimmetriák túlélik a redukciót. Az (5.128) összefüggéshez hasonló módon az azonosítások projekciókat indukálnak, melyek az alábbi redukált fázisterek közt hatnak:

$$\psi_2^{\rm red} : (T^*G_2)_{\rm red} \to (T^*G_1)_{\rm red}, \quad \psi_1^{\rm red} : (T^*G_1)_{\rm red} \to (T^*G)_{\rm red}, \quad \psi_{\rm red} := \psi_1^{\rm red} \circ \psi_2^{\rm red}. \tag{5.143}$$

A $(T^*G_i)_{\rm red}$ $(i = 1, 2)$ fázistereken a Poisson kommutáló függvények két családja a $\{H^i_k\}$ és a $\{\hat{H}^i_{\pm k}\}$ megadhatók a redukciónál ismertetett (5.131) módon, vagy a

$$H^1_j := H_j \circ \psi_1^{\rm red},\ \hat{H}^1_{\pm k} := \hat{H}_{\pm k} \circ \psi_1^{\rm red} \quad \text{és} \quad H^2_j := H_j \circ \psi_{\rm red},\ \hat{H}^2_{\pm k} := \hat{H}_{\pm k} \circ \psi_{\rm red} \tag{5.144}$$

összefüggések segítségével. Az (5.143) projekciók explicit leírásához először a $(T^*SU(n))_{\rm red}$ fázisteret kell megvizsgálni. Az $U(n)$ esethez hasonlóan itt is két ekvivalens leírást kapunk.

5.3.3. $(T^*SU(n))_{\rm red}$ két modellje

A függelék (5.168-5.171) jelöléseinek megfelelően tekintsük az alábbi koérintő nyalábot

$$T^*SQ(n) \simeq T^*\,\mathrm{Simp}_{n-1} \simeq \mathrm{Simp}_{n-1} \times \mathbb{R}^{n-1} = \{(\delta, \gamma)\}, \quad \Omega_{T^*SQ(n)} = \sum_{j=1}^{n-1} d\gamma_j \wedge d\delta_j. \tag{5.145}$$

Az (5.178)-ban bevezetett $\beta_k(\delta)$ és $\beta(\delta) := \mathrm{diag}(\beta_1(\delta),\dots,\beta_n(\delta))$ $\delta \in \mathrm{Simp}_{n-1}$ jelölések felhasználásával vezessük be a

$$\mathcal{J}(\delta,\gamma) := \mathrm{i}\sum_{j=1}^{n-1}\gamma_j(E_{j,j}-E_{j+1,j+1}) + \mathrm{i}\,x\sum_{a\neq b}\frac{E_{a,b}}{1-e^{\mathrm{i}(\beta_b(\delta)-\beta_a(\delta))}} \tag{5.146}$$

$su(n)$ értékű függvényt. A $\xi_0 := -\mathrm{i}\,x\sum_{a\neq b}E_{a,b}$ választás esetén a

$$(T^*SU(n))^{\mathrm{I}}_{\mathrm{red}} := \{(e^{\mathrm{i}\,\beta(\delta)},\mathcal{J}(\delta,\gamma),\xi_0)\,|\,(\delta,\gamma)\in T^*\,\mathrm{Simp}_{n-1}\} \simeq T^*SQ(n) \tag{5.147}$$

sokaság az (5.137) redukált fázistér egy modellje. A $(T^*SU(n))^{\mathrm{I}}_{\mathrm{red}} \subset T^*SU(n)\times\mathcal{O}$ egy *globális szelése* a $\bar{G}$ csoport pályáinak a $\Phi_0 : T^*SU(n)\times\mathcal{O}\to su(n)$ momentum leképezés nulla értékéhez tartozó szintfelületben, ahol

$$\Phi_0(\Gamma,\mathcal{J},\xi) = \mathcal{J} - \Gamma^{-1}\mathcal{J}\Gamma + \xi. \tag{5.148}$$

A $T^*SU(n)\times\mathcal{O}$ szimplektikus formájának „visszahúzottja" $(T^*SU(n))^{\mathrm{I}}_{\mathrm{red}}$-re megegyezik $\Omega_{T^*SQ(n)}$-el. A fentiekhez vezető gondolatmenet nagyon hasonló az 5.2.1 fejezetben megismert levezetéshez. A $(T^*SU(n))_{\mathrm{red}}$ redukált fázistér (5.147) modellje interpretálható n megkülönböztethető részecske („tömegközépponti rendszerbeli") relatív mozgásaként a körön. A relatív mozgást a $-\frac{1}{2}\mathrm{tr}(\mathcal{J}(\delta,\gamma)^2)$ Hamilton-függvény írja le, ami Liouville integrálható. A Poisson kommutáló Hamilton-függvényeket $\mathcal{J}(\delta,\gamma)$ spektrálinvariánsai adják.

A következőkben a $(T^*SU(n))_{\mathrm{red}}$ redukált fázistér másik modelljét ismertetjük, melyet az alábbi összefüggések jellemeznek

$$\mathbb{C}^{n-1} = \{\zeta = (\zeta_1,\dots,\zeta_{n-1})\},\quad \Omega_{\mathbb{C}^{n-1}} := \mathrm{i}\sum_{j=1}^{n-1}d\zeta_j\wedge d\bar{\zeta}_j. \tag{5.149}$$

Az 5.2.2 fejezetben megismert gondolatmenethez hasonló módon megkonstruálhatjuk a $\Phi_0^{-1}(0)\subset T^*SU(n)\times\mathcal{O}$ egy másik globális szelését. Először is tekintsük a

$$\hat{\pi}^0_k(\zeta) := x\frac{n+1-2k}{2} - \sum_{1\le j\le(k-1)}\frac{j}{n}|\zeta_j|^2 + \sum_{k\le j\le(n-1)}\frac{n-j}{n}|\zeta_j|^2,\qquad \forall k=1,\dots,n \tag{5.150}$$

függvényeket, melyek eleget tesznek a $\sum_{k=1}^n\hat{\pi}^0_k(\zeta)=0$ egyenlőségnek. Ezután vezessük be a $Q^0_{j,k}(\zeta)$ mennyiségeket is ($Q_{j,k}$ (5.100) definíciójában $\hat{\pi}$-t cseréljük ki $\hat{\pi}^0$-ra). Majd a ϑ-t definiáló (5.103)-(5.109) formulákból az alábbi helyettesítések alkalmazásával nyerjük a megfelelő formulát az $SU(n)$ értékű $\vartheta^0(\zeta)$-ra:

$$Z\to 1,\quad z_j\to\zeta_j,\quad \hat{\pi}_j\to\hat{\pi}^0_j,\quad Q_{j,k}\to Q^0_{j,k}. \tag{5.151}$$

Az előbbivel analóg módon (5.102) módosításával definiálható a $\mathbb{C}^n$ értékű $\mathcal{V}^0(\zeta)$ függvény. Végül az (5.110) összefüggéshez hasonlóan bevezetjük a következő síma leképezést

$$\hat{\mathcal{I}}^0 : \mathbb{C}^{n-1}\to\Phi_0^{-1}(0)\subset T^*SU(n)\times\mathcal{O},\qquad \hat{\mathcal{I}}^0(\zeta) := \big(\vartheta^0(\zeta)^{-1},-\mathrm{i}\,\hat{\pi}^0(\zeta),\xi(x,\mathcal{V}^0(\zeta))\big). \tag{5.152}$$

Belátható, hogy $\hat{\mathcal{I}}^0$ injekvtív, továbbá

$$(T^*SU(n))^{\mathrm{II}}_{\mathrm{red}} := \{(\vartheta^0(\zeta)^{-1},-\mathrm{i}\,\hat{\pi}^0(\zeta),\xi(x,\mathcal{V}^0(\zeta)))\,|\,\zeta\in\mathbb{C}^{n-1}\}\simeq\mathbb{C}^{n-1}, \tag{5.153}$$

egy *globális szelése* $\bar{G}$ *pályáinak és a redukált szimplektikus forma megfelelő alakja* $\Omega_{\mathbb{C}^{n-1}}$. A redukált fázistér fenti modellje esetén a kommutáló Hamilton-függvényeket a $\vartheta^0(\zeta)$ spektrálinvariánsai adják.

A fent vázolt szimmetria-redukciós konstrukciónak köszönhetően azonnal megkapjuk az

$$\mathcal{R}_0 : (T^*SU(n))^{\mathrm{I}}_{\mathrm{red}} \to (T^*SU(n))^{\mathrm{II}}_{\mathrm{red}} \tag{5.154}$$

dualitási transzformációt, mely egy alkalmas mértéktranszformációval hat a két globális szelés közt. Az $\mathcal{R}_0$ a „tömegközépponti rendszerben” tárgyalt Sutherland modell hatás-szög leképezése, míg $\mathcal{R}_0^{-1}$ a duális Ruijsenaars–Schneider modell hatás-szög leképezése.

5.3.4. Diszkrét redukciók és dualitások

Az $U(n)$ esetben a redukált fázistér következő két duális modelljét kaptuk

$$P \simeq (T^*G)_{\mathrm{red}} \simeq \hat{P}_c, \tag{5.155}$$

melyekhez az alábbi duális kapcsolatban álló szimplektikus fedőterek tartoznak:

$$T^*U(1) \times (T^*SU(n))^{\mathrm{I}}_{\mathrm{red}} \simeq (T^*G_1)_{\mathrm{red}} \simeq T^*U(1) \times (T^*SU(n))^{\mathrm{II}}_{\mathrm{red}} \tag{5.156}$$

és

$$T^*\mathbb{R} \times (T^*SU(n))^{\mathrm{I}}_{\mathrm{red}} \simeq (T^*G_2)_{\mathrm{red}} \simeq T^*\mathbb{R} \times (T^*SU(n))^{\mathrm{II}}_{\mathrm{red}}. \tag{5.157}$$

Az (5.155)-(5.157) egyenletek két oldalán a megfelelő duális fázisterek szerepelnek, középen pedig az „absztrakt” redukált fázisterek állnak. A duális rendszerek (5.144) kommutáló függvényeinek $\{H^i_k\}$ és $\{\hat{H}^i_{\pm k}\}$ családjai kifejezhetőek a $(T^*G_i)_{\mathrm{red}}$ redukált fázistér megfelelő modelljeinek használatával $\{H_k\}$-hoz és $\{\hat{H}_{\pm k}\}$-hoz hasonló módon, mint azt $(T^*G)_{\mathrm{red}}$ esetén láttuk. Az eddig elmondottakat az alábbi kommutatív diagrammal összegezhetjük:

$$\begin{tikzcd}
T^*\mathbb{R} \times T^*SQ(n) \arrow[r, "\mathrm{id}_2 \times \mathcal{R}_0"] \arrow[d, "\psi_2^{\mathrm{I}}"'] & T^*\mathbb{R} \times \mathbb{C}^{n-1} \arrow[d, "\psi_2^{\mathrm{II}}"] \\
T^*U(1) \times T^*SQ(n) \arrow[r, "\mathrm{id}_1 \times \mathcal{R}_0"] \arrow[d, "\psi_1^{\mathrm{I}}"'] & T^*U(1) \times \mathbb{C}^{n-1} \arrow[d, "\psi_1^{\mathrm{II}}"] \\
P = T^*Q(n) \arrow[r, "\mathcal{R}"] & \hat{P}_c = \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C}^{\times}
\end{tikzcd} \tag{5.158}$$

A fenti diagramm az (5.6) diagramm finomított, részletes változatát adja. Konkrétan ψ_2^{I} felel meg az (5.143)-beli ψ_2^{red} projekciónak, ami az $n\mathbb{Z}$ diszkrét csoporttal történő redukálás eredménye és az alábbi két fázistér közt hat

$$\begin{aligned}
(T^*G_2)_{\mathrm{red}} &\simeq T^*\mathbb{R} \times (T^*SU(n))^{\mathrm{I}}_{\mathrm{red}} \equiv T^*\mathbb{R} \times T^*SQ(n), \\
(T^*G_1)_{\mathrm{red}} &\simeq T^*U(1) \times (T^*SU(n))^{\mathrm{I}}_{\mathrm{red}} \equiv T^*U(1) \times T^*SQ(n).
\end{aligned} \tag{5.159}$$

Továbbá ψ_2^{II} felel meg ψ_2^{red}-nek és a redukált fázisterek alábbi két modellje között hat

$$\begin{aligned}
(T^*G_2)_{\mathrm{red}} &\simeq T^*\mathbb{R} \times (T^*SU(n))^{\mathrm{II}}_{\mathrm{red}} \equiv T^*\mathbb{R} \times \mathbb{C}^{n-1}, \\
(T^*G_1)_{\mathrm{red}} &\simeq T^*U(1) \times (T^*SU(n))^{\mathrm{II}}_{\mathrm{red}} \equiv T^*U(1) \times \mathbb{C}^{n-1}.
\end{aligned} \tag{5.160}$$

Az $\mathcal{R}_0$ a tömegközépponti rendszernél tárgyalt (5.154) dualitási szimplektomorfizmus, míg id_2 és id_1 az identitás leképezés $T^*\mathbb{R}$, illetve $T^*U(1)$ esetén. A ψ_2^{I} és ψ_2^{II} leképezéseknek csak az első faktora nem-triviális. Ez $T^*\mathbb{R}$-ból $T^*U(1)$-be képez, egy (u,w) elempárnak $(\zeta_0, v_0) := (e^{\mathrm{i}\, u}, w)$-t felelteti meg. A ψ_1^{I} és ψ_1^{II} leképezések pedig a $\mathbb{Z}_n$ csoport hatása által indukált projekcióknak felelnek meg. Ennek megfelelően az $\alpha(e^{\mathrm{i}\,\frac{2\pi}{n}})_{\mathrm{red}} : (T^*G_1)_{\mathrm{red}} \to (T^*G_1)_{\mathrm{red}}$ leképezés két alternatív realizációval rendelkezik, az első

$$\begin{aligned}
&\alpha(e^{\mathrm{i}\,\frac{2\pi}{n}})^{\mathrm{I}}_{\mathrm{red}} : T^*U(1) \times T^*SQ(n) \to T^*U(1) \times T^*SQ(n), \\
&\alpha(e^{\mathrm{i}\,\frac{2\pi}{n}})^{\mathrm{I}}_{\mathrm{red}} : (\zeta_0, v_0, \delta, \gamma) \mapsto (e^{-\mathrm{i}\,\frac{2\pi}{n}}\zeta_0, v_0, \delta_2, \ldots, \delta_{n-1}, 2\pi - \sum_{j=1}^{n-1}\delta_j, \gamma_2 - \gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1} - \gamma_1, -\gamma_1),
\end{aligned} \tag{5.161}$$

míg a második

$$\begin{aligned}
&\alpha(e^{\mathrm{i}\,\frac{2\pi}{n}})^{\mathrm{II}}_{\mathrm{red}} : T^*U(1) \times \mathbb{C}^{n-1} \to T^*U(1) \times \mathbb{C}^{n-1}, \\
&\alpha(e^{\mathrm{i}\,\frac{2\pi}{n}})^{\mathrm{II}}_{\mathrm{red}} : \big(\zeta_0, v_0, \{\zeta_j\}_{j=1}^{n-1}\big) \mapsto \big(e^{-\mathrm{i}\,\frac{2\pi}{n}}\zeta_0, v_0, \{e^{\mathrm{i}\,\frac{2\pi}{n}(n-j)}\zeta_j\}_{j=1}^{n-1}\big).
\end{aligned} \tag{5.162}$$

A ψ_1^{II}-hez tartozó formulára a következő összefüggés teljesül

$$\psi_1^{\mathrm{II}} : (\zeta_0, v_0, \zeta) \mapsto (z, Z) \ \text{ ahol } \ z_j = \zeta_0^{n-j}\zeta_j, \ Z = \zeta_0^n \exp\Big(\frac{1-n}{2}x + \frac{v_0}{n} + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{k-n}{n}|\zeta_k|^2\Big). \tag{5.163}$$

A ψ_1^{I} leképezést a függelékben ismertetjük.

Összefoglalva, ebben a fejezetben a [20] cikkünkre támaszkodva csoportelméleti nézőpontból mutattuk be a a Sutherland modell különböző fizikai interpretációihoz tartozó P, P_1 és P_2 fázisterei és a megfelelő duális Ruijsenaars modellek $\hat{P}_c$, $\hat{P}_1$ és $\hat{P}_2$ fázisterei közötti hatás-szög leképezéseket. Ugyancsak csoportelméleti nézőpontból ismertettük, hogy a duális párok között az (5.1) fedő homomorfizmusok miként indukálnak fedő Poisson leképezéseket. A dualitási transzformációkkal és a fedőleképezésekkel kapcsolatos eredményeket az (5.158) diagramm összegzi, amely egybevág a Ruijsenaars által direkt számolással megkonstruált hasonló diagrammal [44]. Az ismertetett gondolatmenet technikai egyszerűsítést jelent, hiszen a dualitási transzformációk szimplektikussága azonnal adódott.

5.4. Függelék a Sutherland modell fázistereiről

A függelékben [20]-at követve bemutatjuk, hogy a (2.128)-beli P_2, P_1 és P fázisterek, hogyan felelnek meg az $\mathbb{R}$ egyenesen mozgó megkülönböztethető vagy a $U(1)$ körön mozgó megkülönböztethetetlen részecskéknek. Az ismertetésre kerülő tárgyalás hasonló a [44]-ben találhatóhoz, de nagyobb hangsúlyt kap a csoportelméleti megközelítés.

5.4.1. Megkülönböztethető részecskék az egyenesen

Tekintsünk n megkülönböztethető részecskét, melyek közti kölcsönhatást a (2.126) Hamilton-függvény írja le. A taszító jellegű kölcsönhatási tag konkrét alakjából adódóan az időfejlődés során a részecskék sorrendje nem változhat. A potenciál periodicitásának köszönhetően a részecske pozíciók különbsége is korlátos. A konfigurációs tér megválasztásánál több ekvivalens lehetőséggel rendelkezünk; egy ilyen lehetőség az alábbi konvex tartomány:

$$C(n) := \{u \in \mathbb{R}^n \,|\, u_1 > u_2 > \cdots > u_n,\ u_1 - u_n < 2\pi\}. \tag{5.164}$$

A fenti választáshoz az alábbi fázistér tartozik:

$$T^*C(n) = C(n) \times \mathbb{R}^n = \{(u,w) \,|\, u \in C(n),\ w \in \mathbb{R}^n\}, \quad \Omega_{T^*C(n)} = \sum_{j=1}^n dw_j \wedge du_j, \tag{5.165}$$

melyet ellátunk a

$$H^{T^*C(n)}_{\mathrm{Suth}}(u,w) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^n w_j^2 + \frac{1}{4}\sum_{1\le i<j\le n}\frac{x^2}{\sin^2\left(\frac{u_i-u_j}{2}\right)} \tag{5.166}$$

Hamilton-függvénnyel. A $C(n)$ konfigurációs tér a

$$C(n) \simeq \mathbb{R} \times \mathrm{Simp}_{n-1} \tag{5.167}$$

direkt szorzat alakban is felírható, ahol $\mathbb{R}$ tartozik a tömegközéppont mozgásához és a

$$\mathrm{Simp}_{n-1} := \{\delta \in \mathbb{R}^{n-1} \,|\, \delta_j > 0,\quad \sum_{j=1}^{n-1}\delta_j < 2\pi\}, \tag{5.168}$$

nyílt szimplex adja a tömegközépponti rendszerben tekintett mozgás koordinátáit. A tömegközéppont koordinátáját u_0-al, a hozzá kanonikusan konjugált impulzust w_0-al jelöljük. A relatív koordinátákra és a hozzájuk konjugált impulzusokra a δ_j és γ_j jelöléseket vezetjük be. A fázistér az alábbi módon bomlik fel

$$T^*C(n) = T^*\mathbb{R} \times T^*\,\mathrm{Simp}_{n-1} \equiv (\mathbb{R}\times\mathbb{R}) \times (\mathrm{Simp}_{n-1} \times \mathbb{R}^{n-1}) = \{(u_0,w_0)\} \times \{(\delta,\gamma)\}. \tag{5.169}$$

A szimplektikus forma az

$$\Omega_{T^*C(n)} = \Omega_{T^*\mathbb{R}} + \Omega_{T^*\,\mathrm{Simp}_{n-1}} = dw_0 \wedge du_0 + \sum_{j=1}^{n-1} d\gamma_j \wedge d\delta_j \tag{5.170}$$

alakban írható. A $T^*C(n)$ Darboux koordinátáinak (u,w) és $(u_,w_0,\delta,\omega)$ halmazai közt ható szimplektomorfizmust az alábbi összefüggés definiálja:

$$\begin{aligned}
&\delta_j = u_j - u_{j+1}, \qquad \gamma_j = \sum_{k=1}^j w_k - \frac{j}{n}\sum_{k=1}^n w_k, \quad j = 1,\dots,n-1,\\
&u_0 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n u_k, \qquad w_0 = \sum_{k=1}^n w_k.
\end{aligned} \tag{5.171}$$

A megfelelő inverz leképezés pedig az következő módon írható:

$$\begin{aligned}
&u_n = u_0 - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} k\delta_k, \quad u_j = u_0 - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} k\delta_k + \sum_{k=j}^{n-1}\delta_k, \quad j = 1,\dots,n-1,\\
&w_m = \gamma_m - \gamma_{m-1} + \frac{1}{n}w_0, \quad m = 1,\dots,n, \quad (\gamma_0 = \gamma_n := 0).
\end{aligned} \tag{5.172}$$

A „szeparált változók" használatával a Hamilton-függvény kinetikus része az

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} w_k^2 = \frac{1}{2n}w_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n-1} A_{j,k}\gamma_j\gamma_k, \tag{5.173}$$

alakot ölti, ahol alkalmaztuk az alábbi jelölést

$$A_{j,k} := \operatorname{tr}\left((E_{j,j} - E_{j+1,j+1})(E_{k,k} - E_{k+1,k+1})\right). \tag{5.174}$$

Az (5.170) mátrix az $sl(n)$ Lie-algebra Cartan mátrixsza. A Hamilton-függvény potenciális energia része csak a δ_j koordinátáktól függ.

Fontos megjegyeznünk, hogy Simp_{n-1} tekinthető az

$$SQ(n) := S\mathbb{T}(n)^0/S(n) \tag{5.175}$$

modelljének, amely az $S(n)$ pályáiból áll $S\mathbb{T}(n)^0$-ban. A említett kapcsolat tisztázásához vezessük be az

$$\mathcal{A}(n-1) := \{\beta = \operatorname{diag}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \,|\, \beta_1 > \beta_2 > \cdots > \beta_n,\ \beta_1 - \beta_n < 2\pi,\ \operatorname{tr}(\beta) = 0\}. \tag{5.176}$$

összefüggéssel definiált Weyl alkóvot. Az exponenciális leképzés diffeomorf módon képezi $\mathcal{A}(n-1)$-t az

$$A(n-1) := \{e^{\mathrm{i}\beta} \,|\, \beta \in \mathcal{A}(n-1)\} \subset ST(n)^0 \tag{5.177}$$

részsokaságba, amely az $S(n)$-hatásának fundamentális tartomány $S\mathbb{T}(n)^0$-en. Ezután definiálunk egy diffeomorfizmust $\mathcal{A}(n-1)$ és Simp_{n-1} között a $\delta \mapsto \beta(\delta)$ leképezés révén, mely az alábbi módon hat

$$\beta_n(\delta) = -\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} k\delta_k, \qquad \beta_j(\delta) = \beta_n(\delta) + \sum_{k=j}^{n-1}\delta_k, \quad j = 1, \dots, n-1. \tag{5.178}$$

Az eddigieket kombinálva az alábbi azonosításokra jutottunk

$$SQ(n) \longleftrightarrow A(n-1) \longleftrightarrow \mathcal{A}(n-1) \longleftrightarrow \mathrm{Simp}_{n-1}\,. \tag{5.179}$$

5.4.2. Megkülönböztethető részecskék a körön

Az (5.27)-beli $\mathbb{T}(n)^0$ sokaság tekinthető az n az $U(1)$ körön mozgó megkülönböztethető „nem-egybeeső" pontrészecske konfigurációs tereként. A $\tau = \operatorname{diag}(\tau_1, \dots, \tau_n) \in \mathbb{T}(n)^0$ egy adott konfigurációt ad meg, ahol a k-adik részecske pozícióját τ_k jelöli. Belátható, hogy a $\mathbb{T}(n)^0$ összefüggő komponensei az n megkülönböztethető részecske eltérő ciklikus sorbarendezéseinek felelnek meg. Ez a ciklikus rendezés az $S(n)$ csoport $(n-1)!$ különböző n-ciklusához tartozik. A dinamikát megszoríthatjuk az egyik összefüggő komponensre, válasszuk konkrétan az alábbi sokaságot

$$K(n) := \{e^{\mathrm{i}q} \,|\, q = \operatorname{diag}(q_1, \dots, q_n),\ q_1 > q_2 > \cdots > q_n,\ q_1 - q_n < 2\pi\}. \tag{5.180}$$

Ehhez a választáshoz tartozó fázisteret az alábbi összefüggések jellemzik

$$T^*K(n) = K(n) \times \mathbb{R}^n = \{(e^{\mathrm{i}\,q}, p)\}, \quad \Omega_{T^*K(n)} = \sum_{k=1}^{n} dp_k \wedge \frac{de^{\mathrm{i}\,q_k}}{\mathrm{i}\, e^{\mathrm{i}\,q_k}}. \tag{5.181}$$

Nem szabad figyelmen kívül hagynunk, hogy q_n csak 2π egész többszöröseitől eltekintve értelmezett. Az $e^{\mathrm{i}\,q_n}$ függvény viszont jól-definiált. A q_n megválasztása után az (5.180) összefüggés révén a q_j-k már jól definiálttá válnak. Így globálisan jól-definiált koordinátákat kapunk $K(n)$-en az alábbi formulával:

$$\zeta_0 := e^{\mathrm{i}\,q_n} \exp(\frac{\mathrm{i}}{n} \sum_{j=1}^{n-1} j(q_j - q_{j+1})) \quad \text{és} \quad \delta_j := q_j - q_{j+1}, \quad j = 1, \ldots, n-1. \tag{5.182}$$

A fenti jelöléseket felhasználva vezessünk be egy leképezést $K(n)$-ből $U(1) \times \mathrm{Simp}_{n-1}$-be az alábbi definícióval

$$e^{\mathrm{i}\,q} \mapsto (\zeta_0(e^{\mathrm{i}\,q}), \delta(e^{\mathrm{i}\,q})). \tag{5.183}$$

Ez a leképezés egy diffeomorfizmus és az inverz leképezés $U(1) \times \mathrm{Simp}_{n-1}$-ből képez $K(n)$-be, melyet a következő formula ír le

$$(\zeta_0, \delta) \mapsto \zeta_0 e^{\mathrm{i}\,\beta(\delta)}, \tag{5.184}$$

itt felhasználtuk $\beta_k(\delta)$-ra az (5.178)-ben bevezetett jelölést. Az eddig elmondottak alapján az alábbi azonosításokat végezhetjük el

$$T^*K(n) = T^*U(1) \times T^*\,\mathrm{Simp}_{n-1} \equiv (U(1) \times \mathbb{R}) \times (\mathrm{Simp}_{n-1} \times \mathbb{R}^{n-1}) = \{(\zeta_0, v_0)\} \times \{(\delta, \gamma)\}. \tag{5.185}$$

Ennek megfelelően a szimplektikus forma az

$$\Omega_{T^*K(n)} \simeq \Omega_{T^*U(1)} + \Omega_{T^*\,\mathrm{Simp}_{n-1}} = dv_0 \wedge \frac{d\zeta_0}{\mathrm{i}\,\zeta_0} + \sum_{j=1}^{n-1} d\gamma_j \wedge d\delta_j \tag{5.186}$$

alakot ölti. A v_0 és γ_j kanonikus impulzusok kapcsolatát p_k-val a

$$v_0 = \sum_{k=1}^{n} p_k, \quad \gamma_j = \sum_{k=1}^{j} p_k - \frac{j}{n} \sum_{k=1}^{n} p_k \tag{5.187}$$

összefüggések adják meg. Az (5.179) formula figyelembevételével az (5.186)-beli második tag tekinthető a $T^*SQ(n) \simeq T^*\,\mathrm{Simp}_{n-1}$ szimplektikus formájaként.

Az alfejezetet néhány észrevétellel zárjuk. Először is megjegyezzük, hogy az (5.182)-beli ζ_0 jelenti a „tömegközépponti koordinátát” a körön mozgó megkülönböztethető részecskék esetén. Ezzel konzisztens az is, hogy ha elforgatjuk a részecskekoordináták mindegyikét α szöggel, akkor ζ_0 is pontosan α szöggel fordul el és a δ_j relatív koordináták.

Másodszor, vegyük észre, hogy a körön mozgó részecskék fázistere az egyenesen mozgó részecskék fázisterének szimplektikus faktortereként adódik. A faktorizálását a $\mathbb{Z}$ csoport $n\mathbb{Z}$ részcsoportjával végezhetjük el, melynek hatását $T^*C(n)$-en az $n \in n\mathbb{Z}$ elem $((u_1, \ldots, u_n), w) \mapsto ((u_1 - 2\pi, \ldots, u_n - 2\pi), w)$ hatása generálja, ami minden részecske pozícióját eltolja 2π-vel. Az

(5.169)-beli szeparált változókon ez a $(u_0, w_0, \delta, \gamma) \mapsto (u_0 - 2\pi, w_0, \delta, \gamma)$ hatást implikálja. A megfelelő pályák tere szimplektikus sokaság, amit azonosíthatunk a $K(n)$ koérintő nyalábjával, azaz

$$T^*C(n)/n\mathbb{Z} \equiv T^*K(n). \tag{5.188}$$

A megfelelő

$$\psi_2^{\mathrm{I}} : T^*C(n) \to T^*K(n) \tag{5.189}$$

projekcióra az

$$(u, w) \mapsto (e^{\mathrm{i}\, q}, p) := (e^{\mathrm{i}\, \mathrm{diag}(u_1,\dots,u_n)}, w), \tag{5.190}$$

összefüggés adódik, amit (5.169) és (5.185) használatával a

$$T^*\mathbb{R} \times T^* \,\mathrm{Simp}_{n-1} \ni (u_0, w_0, \delta, \gamma) \mapsto (e^{\mathrm{i}\, u_0}, w_0, \delta, \gamma) \in T^*U(1) \times T^* \,\mathrm{Simp}_{n-1} \tag{5.191}$$

ekvivalens alakban is írhatunk. A faktorizálás az exponenciális leképezésen keresztül megfelelteti az egyenesen mozgó részecskék u_0 tömegközéppont koordinátáját a körön mozgó részecskék $\zeta_0 \in U(1)$ koordinátájának. A ψ_2^{I} leképezés lokálisan szimplektikus, vagyis $T^*C(n)$ szimplektikus $n\mathbb{Z}$-fedése $T^*K(n)$-nek. Az (5.179) összefüggésnek köszönhetően a ψ_2^{I} (5.189)-beli definíciója konzisztens az (5.158) diagrammal.

5.4.3. Megkülönböztethetetlen részecskék a körön

Az $S(n)$ permutációcsoport szabadon hat $\mathbb{T}(n)^0$-on alábbi formula szerint

$$\sigma(\tau)_k := \tau_{\sigma^{-1}(k)}, \quad \forall \sigma \in S(n),\ \forall \tau = \mathrm{diag}(\tau_1, \dots, \tau_n) \in \mathbb{T}(n)^0. \tag{5.192}$$

A $Q(n)$ konfigurációs tér definíció szerint előáll a $\mathbb{T}(n)^0$ permutációtól eltekintve megegyező elemeinek azonosításával. Így gondolhatunk $Q(n)$-re, mint a körön mozgó megkülönböztethetetlen részecskék konfigurációs terére. le. Alkalmas permutációval $\mathbb{T}(n)^0$ tetszőleges eleme átvihető az (5.180)-ban definiált $K(n) \subset \mathbb{T}(n)^0$ összefüggő komponensbe. Az $S(n)$ ciklikus permutációk által alkotott részcsoportja $K(n)$-t $K(n)$-be képezi (a ciklikus permutációk által alkotott részcsoportot a $\mu : (1, 2, \dots, n) \mapsto (\mu(1), \mu(2), \dots, \mu(n)) := (n, 1, \dots, n-1)$ elem hatása generálja). Az elmondottak alapján a

$$Q(n) = \mathbb{T}(n)^0/S(n) = K(n)/\mathbb{Z}_n \tag{5.193}$$

azonosításokat kapjuk. A $K(n)$ (5.183)-beli $K(n) \equiv U(1) \times \mathrm{Simp}_{n-1}$ modellje esetén a ciklikus permutáció a

$$\mu : (\zeta_0, \delta_1, \dots, \delta_{n-2}, \delta_{n-1}) \mapsto (e^{-\mathrm{i}\, \frac{2\pi}{n}} \zeta_0, \delta_2, \dots, \delta_{n-1}, 2\pi - \sum_{j=1}^{n-1} \delta_j) \tag{5.194}$$

módon hat és a megfelelő koérintő felemeltre a

$$\mu : (\zeta_0, v_0, \delta, \gamma) \mapsto (e^{-\mathrm{i}\, \frac{2\pi}{n}} \zeta_0, v_0, \delta_2, \dots, \delta_{n-1}, 2\pi - \sum_{j=1}^{n-1} \delta_j, \gamma_2 - \gamma_1, \dots, \gamma_{n-1} - \gamma_1, -\gamma_1) \tag{5.195}$$

összefüggés adódik. Idézzük fel, hogy (5.179) szerint $\mathrm{Simp}_{n-1} \simeq SQ(n)$ teljesül, így azonosíthatjuk $K(n)$-et $U(1) \times SQ(n)$-el. Jelölje $[\tau]$ a $\mathbb{T}(n)^0$ egy τ elemén átmenő $S(n)$-pályát. Ekkor az (5.194)-ben definiált hatás a következő alakban írható

$$\mu : (\zeta_0, [\tau]) \mapsto (e^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}}\zeta_0, [e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}}\tau]). \tag{5.196}$$

Ebben a megvilágításban az (5.193)-beli $K(n) \to Q(n)$ projekció az

$$U(1) \times SQ(n) \ni (\zeta_0, [\tau]) \mapsto [\zeta_0\tau] \in Q(n) \tag{5.197}$$

módon írható, melynek koérintő felemeltje a

$$\psi_1^{\mathrm{I}} : T^*K(n) \simeq T^*U(1) \times T^*SQ(n) \to T^*Q(n) \tag{5.198}$$

leképezés. A ψ_1^{I} „visszahúzottjára” teljesül a $(\psi_1^{\mathrm{I}})^*(\Omega_{T^*Q(n)}) = \Omega_{T^*K(n)}$ egyenlőség, azaz ψ_1^{I} szimplektikus fedőleképezés. A $Q(n)$ nem-triviális sokaság, ezért $T^*Q(n)$ helyett célszerű a dinamikát $T^*K(n)$-n elemezni majd ezt visszavetíteni $T^*Q(n)$-re, hiszen $T^*K(n)$ a $T^*Q(n)$ szimplektikus fedését adja.

5.4.4. $Q(n)$ egy koordinátázása

Ebben az utolsó alfejezetben ismertetjük $Q(n)$ egy konkrét, két térképből álló koordinátázását. Az (5.193) összefüggés szerint $Q(n)$ elemeire $\mathbb{T}(n)^0$-beli $S(n)$-pályákként gondolunk és felhasználjuk a $\det : Q(n) \to U(1)$ leképezést, melyet a következő összefüggés definiál

$$\det([X]) := \det(X), \quad \forall X \in \mathbb{T}(n)^0. \tag{5.199}$$

Bármely $z \in U(1)$ esetén a $\det^{-1}(z) \subset Q(n)$ inverz-kép azon $[X]$ $S(n)$-pályákból áll, melyekre teljesül a $\det([X]) = z$ egyenlőség. Amennyiben $z \in U(1)$ és $[X]$ egy olyan eleme $Q(n)$-nek, hogy $\det([X]) = z$, akkor az $[X]$-et a $[z^{1/n}Y]$ ekvivalens alakban is írhatjuk, ahol $[Y]$ az $SQ(n)$ egy egyértelműen meghatározott elemét jelöli. Így elmondható, hogy $z^{1/n}$ bármely választása egy diffeomorfizmust létesít $\det^{-1}(z) \subset Q(n)$ és $SQ(n)$ között. Ezért a $Q(n)$-re az alábbi fibrált nyalábként gondolhatunk:

$$(Q(n), U(1), SQ(n), \det), \tag{5.200}$$

ahol a nyaláb bázisa $U(1)$ és a fibrum típusa $SQ(n)$.

Fedjük le a nyaláb $U(1)$ bázisát az alábbi két koordináta térképpel

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &:= \{e^{\mathrm{i}\phi} \mid -\epsilon < \phi < \pi + \epsilon\} \simeq (-\epsilon, \pi + \epsilon), \\ \mathcal{U}' &:= \{e^{\mathrm{i}\phi'} \mid -\pi - \epsilon < \phi' < \epsilon\} \simeq (-\pi - \epsilon, \epsilon), \end{aligned} \tag{5.201}$$

ahol $0 < \epsilon < \pi/2$. Ezután végezzük el $Q(n)|_{\mathcal{U}} := \det^{-1}(\mathcal{U})$ és $Q(n)|_{\mathcal{U}'} := \det^{-1}(\mathcal{U}')$ trivializálását. Az $\mathcal{U}$ térképen dolgozva minden $e^{\mathrm{i}\phi}$ determinánsú $[X]$-et az alábbi alakban írunk fel

$$[X] = [e^{\mathrm{i}\phi/n}Y], \quad [Y] \in SQ(n). \tag{5.202}$$

A $\chi : Q(n)|_{\mathcal{U}} \to \mathcal{U} \times SQ(n)$ trivializálást a

$$\chi : [X] \mapsto (\det([X]), [Y]), \tag{5.203}$$

összefüggés definiálja. Hasonlóan, az $\mathcal{U}'$ térkép esetén bármely $e^{\mathrm{i}\,\phi'}$ determinánsú $[X]$-et a

$$[X] = [e^{\mathrm{i}\,\phi'/n}Y'], \quad [Y'] \in SQ(n), \tag{5.204}$$

alakban írhatunk és definiáljuk a $\chi' : Q(n)|_{\mathcal{U}'} \to \mathcal{U}' \times SQ(n)$ trivializációt a

$$\chi' : [X] \mapsto (\det([X]), [Y']) \tag{5.205}$$

formulával. A két trivializáció metszete $Q(n)|_{\mathcal{U}\cap\mathcal{U}'} = Q(n)|_{\mathcal{V}_+} \sqcup Q(n)|_{\mathcal{V}_-}$, ahol $\mathcal{V}_\pm$ az $\mathcal{U}\cap\mathcal{U}'$ két diszjunkt összefüggő komponensét jelöli, konkrétan

$$\mathcal{V}_+ = \{e^{\mathrm{i}\,\phi}\,|\, -\epsilon < \phi < \epsilon\}, \qquad \mathcal{V}_- = \{e^{\mathrm{i}\,\phi}\,|\, \pi-\epsilon < \phi < \pi+\epsilon\}. \tag{5.206}$$

A fedéseken a trivializációk közti kapcsolatot a

$$[Y'] = [Y], \quad \text{ha} \quad \det([X]) \in \mathcal{V}_+ \quad \text{és} \quad [Y'] = [e^{\mathrm{i}\,2\pi/n}Y], \quad \text{ha} \quad \det([X]) \in \mathcal{V}_- \tag{5.207}$$

relációk írják le. Célszerű azonosítanunk $SQ(n)$-et Simp_{n-1} szimplexszel. Ekkor a két koordináta térképet az alábbi összefüggések jellemzik

$$Q(n)|_{\mathcal{U}} \simeq \mathcal{U} \times \mathrm{Simp}_{n-1} \simeq \{(\phi,\delta)\} \quad \text{és} \quad Q(n)|_{\mathcal{U}'} \simeq \mathcal{U}' \times \mathrm{Simp}_{n-1} \simeq \{(\phi',\delta')\}. \tag{5.208}$$

A $Q(n)|_{\mathcal{V}_+}$-en a megfelelő koordináták megegyeznek, míg a $Q(n)|_{\mathcal{V}_-}$-en a

$$(\phi', \delta'_1, \dots, \delta'_{n-2}, \delta'_{n-1}) = (\phi - 2\pi, \delta_2, \dots, \delta_{n-1}, 2\pi - \sum_{k=1}^{n-1}\delta_k) \tag{5.209}$$

kapcsolat érvényes. Végül elmondhatjuk, hogy a $T^*Q(n)$ lefedhető a $T^*Q(n)|_{\mathcal{U}} \simeq T^*(\mathcal{U} \times \mathrm{Simp}_{n-1})$ és a $T^*Q(n)|_{\mathcal{U}'} \simeq T^*(\mathcal{U}' \times \mathrm{Simp}_{n-1})$ koordináta térképekkel, melyeken a koordináták $(\phi, p_\phi, \delta, \gamma)$ és $(\phi', p_{\phi'}, \delta', \gamma')$. A megfelelő szimplektikus forma az

$$\Omega_{T^*Q(n)|_{\mathcal{U}}} = dp_\phi \wedge d\phi + \sum_{j=1}^{n-1} d\gamma_j \wedge d\delta_j, \quad \Omega_{T^*Q(n)|_{\mathcal{U}'}} = dp_{\phi'} \wedge d\phi' + \sum_{j=1}^{n-1} d\gamma'_j \wedge d\delta'_j \tag{5.210}$$

lokális alakban írható. A kanonikus koordináták a $T^*Q(n)|_{\mathcal{V}_+}$-on megegyeznek, míg $T^*Q(n)|_{\mathcal{V}_-}$-en az alábbi kapcsolat érvényes közöttük

$$(\phi', p_{\phi'}, \delta', \gamma') = (\phi - 2\pi, p_\phi, \delta_2, \dots, \delta_{n-1}, 2\pi - \sum_{j=1}^{n-1}\delta_j, \gamma_2 - \gamma_1, \dots, \gamma_{n-1} - \gamma_1, -\gamma_1). \tag{5.211}$$

6. Összefoglalás

A dolgozat fő célja néhány integrálható sokrészecske rendszerrel kapcsolatos új eredmény ismertetése és összefoglalása volt. A vizsgált rendszerek mindegyike egy térdimenzióban történő mozgást ír le. Az ilyen rendszerek több fontos alkalmazással is rendelkeznek, melyekről például a [12, 18, 37, 45, 51] referenciákban olvashatunk. Vizsgálataink középpontjában a Calogero–Sutherland és a Ruijsenaars–Schneider típusú integrálható sokrészecske rendszerek álltak [12, 36, 46, 51]. A Calogero–Sutherland típusú integrálható rendszerek legfontosabb változataiban a részecskék közti párpotenciál a pozíció különbségek racionális, hiperbolikus, illetve trigonometrikus függvénye. Ezen modellek relativisztikus általánosításainak tekinthetők a Ruijsenaars–Schneider modellek. Vizsgálataink fő eszköze a Marsden–Weinstein-féle szimplektikus redukciós eljárás [1] volt. A dolgozatban három témakörrel foglalkoztunk részletesebben, nevezetesen a szimmetria redukció alkalmazásával, a szuperintegrálhatósággal és a dualitással.

A rövid általános bevezetés után a dolgozat második fejezete a szükséges háttérismereteket tartalmazza. A fejezetet bevezető jellegű résszel kezdtem, amelyben áttekintettem néhány alapvető fogalmat a hamiltoni dinamikai rendszerekkel és a Liouville integrálhatósággal, illetve a szuperintegrálhatósággal kapcsolatban. Ismertettem az integrálható rendszerek témakörében nélkülözhetetlen Lax pár és r-mátrix fogalmát is. Ezután a 2.3 alfejezetben a dolgozatban kulcsszerepet játszó Marsden–Weinstein-féle szimmetria-redukciós eljárást és az eltolási trükköt mutattam be. Ezt a módszert akkor alkalmazhatjuk, ha egy hamiltoni dinamikai rendszer invariáns valamely Lie-csoport fázistéren értelmezett hatására nézve. Ekkor a hatással faktorizálva alacsonyabb dimenziós hamiltoni rendszer adódik. A szimplektikus redukciót tárgyaló rész lezárásaként konkrét példákon keresztül illusztráltam a módszer hasznosságát. Vázlatosan bemutattam a racionális Calogero, a hiperbolikus Sutherland és a racionális Ruijsenaars–Schneider modell hamiltoni redukciós levezetését. Végül a 2.6 alfejezetben röviden ismertettem a későbbiekben részletesebben vizsgált rendszereket, melyek mindegyike előáll a szimmetria-redukciós eljárás alkalmazásával. A 3. fejezettől kezdődik saját eredményeim ismertetése, melyeket pontokba szedve itt röviden áttekintek.

A racionális Ruijsenaars–Schneider modell szuperintegrálhatósága [4, 6]. A 3. fejezetben a a racionális Calogero modell relativisztikus általánosításának tekinthető racionális Ruijsenaars–Schneider modell szuperintegrálhatóságát ismertettem. Azon Liouville integrálható rendszereket nevezzük szuperintegrálhatónak, melyek a Poisson kommutáló mozgásállandókon kívül további időfüggetlen megmaradó mennyiségekkel is rendelkeznek. Először egy módszert mutattam be az extra mozgásállandók konstrukciójára, ami a racionális Calogero modell esetén megfigyelt (3.1-3.2) Poisson algebrát [55] használja fel. Ezután áttértem a racionális Ruijsenaars–Schneider modell vizsgálatára, ahol a (3.10)-ben definiált függvényekkel realizáltuk a (3.1-3.2) Poisson algebrát. A Poisson zárójel relációk meghatározására két módszer áll rendelkezésre. Az egyik a racionális Rujsenaars-Schneider modell r-mátrixának használata, a másik alkalmas invariáns függvények szimmetria-redukciós vizsgálata. Mi az utóbbi utat követtük, amihez segítségül hívtuk a racionális Ruijsenaars–Schneider modell szimmetria-redukciós levezetését [21], amely a $T^*GL(n,\mathbb{C})$ koérintő nyaláb redukcióján alapszik. Ezt a levezetést a háttérismereteket tárgyaló részben vázlatosan áttekintettem. Az említett konstrukciót alkalmazva előállítottam a (2.84) Ruijsenaars–Schneider Hamilton-függvény extra mozgásállandóinak a (3.11) összefüggésben tárgyalt családját. A fejezet második részében [4] alapján bemutattam, hogyan következik a globális nem-kompakt hatás-szög leképezés létezéséből a szuperintegrálhatóság. Ezután ismertettem, hogy az érvelés hogyan alkalmazható a racionális Ruijsenaars-Schneider modell esetében. A kérdéskör tárgyalását néhány további példa említésével zártam.

Egy integrálható $BC(n)$ Sutherland modell [5]. A 4. fejezetben a hamiltoni szimmetria redukció segítségével származtattam egy integrálható sokrészecske rendszert, amely „töltött" részecskéket tartalmaz. Az első ilyen általánosítás Calogero nevéhez fűződik [10], ezt később Olshanetsky és Rogov tárgyalta szimmetria-redukciós nézőpontból [38]. Levezetésünk a (4.1)-beli Hamilton-függvénnyel definiált általánosított Sutherland modellt eredményezi, amely három független csatolási állandót tartalmaz. Az említett $BC(n)$ általánosítást a [5] cikkünkben vezettük le. A modell (4.1) Hamilton-függvénye n töltött részecskét ír le, melyek a pozitív félegyenesen mozognak és kölcsönhatnak a tükörképeikkel és egy az origóban lerögzített töltéssel is. Az ellentétes töltésű részecskék között a pozíció különbségek $\cosh^{-2}$ függvényével arányos vonzó, míg az azonos töltésű részecskék között a pozíció különbségek $\sinh^{-2}$ függvényével arányos taszító potenciál lép fel. A modellt a $G = SU(n,n)$ csoporton történő szabad geodetikus mozgás redukálásával nyertük. A fejezetben először az alkalmazott csoportelméleti hátteret ismertettem, majd a T^*G koérintő nyalábot redukáltam az eltolási trükk segítségével. A G csoporton két kommutáló involúciót vezettünk be, amelyekhez a G_+ és G^+ fixpont csoportok tartoznak. A redukcióhoz a $G_+ \times G^+$ szimmetria csoportot használtuk fel, ahol G_+ a G maximális kompakt részcsoportja. A szimmetria-redukciós eljárásnak köszönhetően azonnal adódik a (4.1) modell Liouville integrálhatósága. A geometria kép segítségével a (4.79-4.81) összefüggéseket felhasználva egy lineáris algebrai eljárást kaptunk, amely alkalmas a részecske pozíciók és a kanonikusan konjugált impulzusok időfejlődésének meghatározására. Amennyiben csak a részecske pozíciók időfejlődését szeretnénk nyomon követni, akkor a módszer a (4.83) kifejezés sajátértékeinek meghatározására egyszerűsödik.

A trigonometrikus Sutherland modell és duálisa [20]. Az 5. fejezetben úgynevezett duális modellpárokat tanulmányoztam. Az ilyen modellpárok fázisterei szimplektomorfak egymással és ez a szimplektomorfizmus megfelelteti az egyik modell hatásváltozóit a másik modell pozíció változóinak [45]. A fejezetben bemutattam a trigonometrikus Sutherland modell és a komplex racionális Ruijsenaars–Schneider modell egy valós formájának dualitását csoportelméleti nézőpontból, a [20] cikkünket követve. Pontosabban szólva, ezen duális pár három változatával foglalkoztunk, melyek a trigonometrikus Sutherland modell három lehetséges fizikai interpretációjához tartoznak. Választástól függően a trigonometrikus Sutherland modell által leírt részecskékre gondolhatunk megkülönböztethető részecskékként az egyenesen vagy a körön, illetve megkülönböztethetetlen részecskékként a körön. Ezekhez rendre a

$$P_2 := T^*\mathbb{R} \times T^*SQ(n), \quad P_1 := T^*U(1) \times T^*SQ(n), \quad P := T^*Q(n) \tag{6.1}$$

fázisterek tartoznak. A különböző konfigurációs tér választásokhoz tartozó duális párokat az (5.6) diagrammon vázolt fedőleképezések kapcsolják össze. A dualitási transzformációk és a szimplektikus fedőleképezések teljes hálóját az (5.158) kommutatív diagrammon foglaltuk össze, melyet először Ruijsenaars konstruált meg [44] direkt módszerrel, a szimplektikus redukció használata nélkül. A szimplektikus redukció hatékony eszközként szolgált a dualitási és fedőleképezések hálójának vizsgálatához. Ez jelentős egyszerűsítést jelent a [44] munkához képest, hiszen a dualitási transzformációk szimplektikussága így azonnal adódik, míg az említett cikkben ehhez komplikált bizonyítás volt szükséges. A vizsgált modellpárok közti fedőleképezések hátterében a

$$G_2 := \mathbb{R} \times SU(n) \longrightarrow G_1 := U(1) \times SU(n) \longrightarrow G := U(n) \tag{6.2}$$

csoportok közötti homomorfizmusok állnak. A duális modellpárokat a T^*G, T^*G_1, T^*G_2 fázisterek szimplektikus redukciójával vezettük le a

$$\bar{G} = G/\mathbb{Z}_G \simeq G_1/\mathbb{Z}_{G_1} \simeq G_2/\mathbb{Z}_{G_2} \tag{6.3}$$

szimmetria csoport felhasználásával. A redukcióhoz a $\bar{G}$-hatást generáló momentum leképezés szokásos „KKS értékét” [32] használtuk fel. A fejezetben először ismertettem a $(T^*G)_{\text{red}}$ redukált fázistér P, $\hat{P}_c$ duális modelljeihez vezető gondolatmenetet, majd meghatároztam a duális modellek Lax mátrixait, melyek a Poisson kommutáló Hamilton-függvényeket generálják. Végül bemutattam az (5.6) diagrammon látható leképezések tulajdonságait. A fejezet függelékében összefoglaltam a három alternatív konfigurációs tér, $Q(n)$, $U(1) \times SQ(n)$ és $\mathbb{R} \times SQ(n)$ választáshoz tartozó alternatív fázisterek leírásával kapcsolatos fontosabb ismereteket.

A dolgozat lezárásaként most röviden megemlítek néhány a bemutatott munkát érintő nyitott kérdést. Érdekes kutatási irányt jelenthet a racionális Ruijsenaars–Schneider modell szuperintegrálhatóságához kötődően az, hogy a $BC(n)$ esetben nem ismert a 3.1 alfejezetben leírt mozgásállandók analógja, és a hiperbolikus Sutherland modell esetén sem ismert az extra mozgásállandók explicit alakja. A töltött részecskéket tartalmazó $BC(n)$ modellnél további vizsgálatok tárgyát képezheti a modell szórási viselkedésének elemzése a [40, 43] cikkeket követve. Egy további érdekes kutatási feladat ezen általánosított Sutherland modell dualitási tulajdonságainak tanulmányozása. Az ezt leíró eredmények tovább gazdagíthatnák a Ruijsenaars által felfedezett hatás-szög dualitással kapcsolatos ismereteket [45].

7. Summary

The goal of the present work was to review and summarize some new results connected with the theory of integrable systems. Each of the systems studied describes motion in one-dimensional space. Such systems have many applications and connections to other areas as reviewed, for example, in [12, 18, 37, 45, 51]. I focused on Calogero–Sutherland and Ruijsenaars–Schneider type integrable many-particle systems [12, 36, 46, 51]. In the most important cases of Calogero–Sutherland type systems the pair potential between the particles is rational, hyperbolic or trigonometric function of the differences of the position variables. The Ruijsenaars–Schneider type systems can be considered as relativistic deformations of the Calogero–Sutherland type systems. The Marsden–Weinstein Hamiltonian symmetry reduction [1] served as the fundamental tool utilized in our studies. The thesis deals with three topics in some detail, namely: application of the symmetry reduction, superintegrability and duality.

After the short Chapter 1 devoted to general introduction, I summarized the necessary background material in Chapter 2. I started Chapter 2 with an introductory part, where I presented some basic notions of Hamiltonian dynamical systems, Liouville integrability and superintegrability. Then I outlined the concepts of the Lax pair and the r-matrix, which play essential role in the theory of integrable systems. In Section 2.3 I described the Marsden–Weinstein reduction and the related technique of the "shifting trick". This method is useful when a Hamiltonian dynamical system is invariant with respect to the action of a Lie group on the phase space. Then one can obtain a lower dimensional Hamiltonian dynamical system by factorization with the action. After describing the symmetry reduction I illustrated its usefulness by concrete examples. Namely, I reviewed the derivations of the rational Calogero, the hyperbolic Sutherland and the rational Ruijsenaars systems based on reduction of free motion on higher dimensional spaces. Finally in Section 2.6, I gave a short introduction to the systems investigated later in details. All these systems were derived by means of symmetry reduction.

Starting from Chapter 3 I begin to present new results. I summarize them briefly under three headings.

The superintegrability of the rational Ruijsenaars-Schneider model [4, 6]. In Chapter 3 I explained the superintegrability of the rational Ruijsenaars–Schneider model, which is a relativistic generalization of the rational Calogero system. A Liouville integrable system is superintegrable if it admits additional (beyond the Poisson commuting functions) constants of motion without explicit time-dependence [52]. First I presented a method for the construction of the extra constants of motion. This is based on the Poisson algebra (3.1-3.2), which was exhibited in the case of the rational Calogero system previously [55]. Then I studied the rational Ruijsenaars–Schneider model, where we realized the Poisson algebra (3.1-3.2) with the functions defined in (3.10). The claimed Poisson bracket relations can be determined in two ways. One relies on the application of the rational r-matrix of the model, the other on the investigation of suitable invariant functions by symmetry reduction. We chose the second way [4] utilizing the derivation of the rational Ruijsenaars–Schneider system in the symplectic reduction framework based on the reduction of the $T^*GL(n,\mathbb{C})$ cotangent bundle [21]. This derivation was reviewed in Subsection 2.5. I constructed a family of extra constants of motion in (3.11) for the Ruijsenaars–Schneider Hamilton function (2.84). In Subsection 3.2, I followed the paper [4] and presented how superintegrability is implied by the existence of a global action-angle map of maximally non-compact type. Then I explained how this can be applied to the action-angle map of the the rational Ruijsenaars–Schneider model. I concluded the discussion of the subject with a brief exposition of some additional examples.

An integrable $BC(n)$ Sutherland model [5]. In Chapter 4 I derived an integrable many-particle system by using the Hamiltonian symmetry reduction, which contains "charged" particles. The first Sutherland type model with "charged" particles was introduced by Calogero [10], later Olshanetsky and Rogov [38] derived it by Hamiltonian reduction. Our generalized Sutherland model is defined by the Hamiltonian (4.1), which contains three independent coupling constants [5]. The Hamiltonian of the model describes attractive-repulsive interactions of n charged particles moving on the positive half-line influenced also by their mirror images and a positive charge fixed at the origin. The interaction is attractive between the particles with different charges and the potential is proportional to the $\cosh^{-2}$ function of particle position differences, the interaction between the particles with identical charges is repulsive and the potential is proportional to the $\sinh^{-2}$ function. The model was obtained by Hamiltonian reduction of the free geodesic motion on the group $G = SU(n,n)$. In the chapter I first summarized the necessary group theoretical background, then reduced the T^*G cotangent bundle using the shifting trick. Two commuting involutions were introduced on the group G having the corresponding fixed-point subgroups G_+ and G^+. Our reduction relies on the symmetry group $G_+ \times G^+$, where G_+ is the maximal compact subgroup of G. The symmetry reduction immediately implies the Liouville integrability of the model (4.1). Based on our geometric picture and the formulas (4.79-4.81), a linear-algebraic algorithm was obtained for constructing the time evolution of the position variables and their canonical conjugates. For the time evolution of particle positions the algorithm reduces to the determination of the eigenvalues of the matrix given in equation (4.83).

The trigonometric Sutherland model and its dual [20]. In Chapter 5 I studied so called dual pairs of integrable many-particle models. The phase spaces of the dual pairs are related by a symplectomorphism that identifies the action variables of the "first" model as the particle-positions of the "second" model, and vice versa [45]. Here I presented the duality between the trigonometric Sutherland model and a particular real form of the complex rational Ruijsenaars–Schneider model from the group theoretic viewpoint of [20]. Speaking more precisely, three variants of this dual pair were studied in association with three possible physical interpretations of the trigonometric Sutherland model. Depending on our choice the particles of the trigonometric Sutherland model can be viewed either as distinguishable particles moving on the line or on the circle, or as indistinguishable particles moving on the circle. The corresponding phase spaces are

$$P_2 := T^*\mathbb{R} \times T^*SQ(n), \quad P_1 := T^*U(1) \times T^*SQ(n), \quad P := T^*Q(n). \tag{7.1}$$

The dual pairs associated with different configuration space choices are linked together by the maps sketched on the diagram (5.6). The detailed web of duality transformations and symplectic covering maps are summarized on the commutative diagram (5.158). This diagram was originally constructed by Ruijsenaars [44] relying on direct methods, without using symplectic reduction. The symplectic reduction provided a powerful tool for the investigation of the web of dualities and covering maps. This viewpoint allowed us to significantly simplify the original arguments of [44], since the symplectic character of the duality maps is obvious in our setting, while originally this required a complicated proof. The covering maps between the three dual pairs correspond to the following covering homomorphisms of Lie groups

$$G_2 := \mathbb{R} \times SU(n) \longrightarrow G_1 := U(1) \times SU(n) \longrightarrow G := U(n). \tag{7.2}$$

The dual pairs arise from the symplectic reduction of the phase spaces T^*G, T^*G_1, T^*G_2 by the symmetry group

$$\bar{G} = G/\mathbb{Z}_G \simeq G_1/\mathbb{Z}_{G_1} \simeq G_2/\mathbb{Z}_{G_2}. \tag{7.3}$$

In our framework the reduction was performed at the usual KKS value [32] of the momentum map of the $\bar{G}$-action. In the chapter I first described the two models P, $\hat{P}_c$ of the reduced phase space $(T^*G)_{\rm red}$, then derived the dual pairs of Lax matrices that generate the commuting reduced Hamiltonians. Finally I presented the detailed properties of the mappings on the diagram (5.6). In the end of the chapter I summarized some important facts about the alternative phase spaces corresponding to the alternative configuration space choices $Q(n)$, $U(1) \times SQ(n)$ and $\mathbb{R} \times SQ(n)$.

I finish this dissertation by mentioning a few open questions related to the presented work. In connection with the superintegrability of the rational Ruijsenaars-Schneider model I remark that $BC(n)$ analogues of the extra constants of motion exhibited in Subsection 3.1 are still not known, so it could be worthwhile to search for such constants of motion. The explicit form of extra constants of motion in the case of the hyperbolic Sutherland model is also unknown. Another challenging problem related to the generalized $BC(n)$ Sutherland model is to analyze the scattering characteristics of the model following [40, 43]. It could be also an interesting work to find duality properties for the generalized Sutherland model, which would extend the action-angle dualities of the integrable many-particle systems discovered by Ruijsenaars [45].

Köszönetnyilvánítás

Köszönöm témavezetőm, Prof. Dr. Fehér László Gyula értékes segítségét, melyet a dolgozat elkészítéséhez nyújtott. Tőle tanultam mindazt amit az integrálható rendszerekről tudok.

Köszönet illeti az SZTE Elméleti Fizikai Tanszék vezetését és munkatársait a munkához szükséges körülmények megteremtéséért.

Szeretném megköszönni családom minden tagjának a rengeteg támogatást és segítséget.

Jelen kutatási eredmények megjelenését „Az SZTE Kutatóegyetemi Kiválósági Központ tudásbázisának kiszélesítése és hosszú távú szakmai fenntarthatóságának megalapozása a kiváló tudományos utánpótlás biztosításával” című, TÁMOP-4.2.2/B-10/1-2010-0012 azonosítószámú projekt támogatja. A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósul meg.

Irodalomjegyzék

[1] R. Abraham, J.E. Marsden, *Foundations of Mechanics*, Second Edition, Benjamin/Cummings, Reading, 1978

[2] I. Aniceto, J. Avan, A. Jevicki, *Poisson Structures of Calogero–Moser and Ruijsenaars–Schneider Models,* J. Phys. A **43**, 185201 (2010)

[3] V.I. Arnol'd, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Springer, Berlin, 1989

[4] V. Ayadi, L. Fehér, *On the superintegrability of the rational Ruijsenaars–Schneider model,* Phys. Lett. A **374**, 1913 (2010)

[5] V. Ayadi, L. Fehér, *An integrable BC(n) Sutherland model with two types of particles*, J. Math. Phys. **52**, 103506 (2011)

[6] V. Ayadi, L. Fehér, T.F. Görbe, *Superintegrability of rational Ruijsenaars–Schneider systems and their action-angle duals,* J. Geom. Symmetry Phys. **27**, 27 (2012)

[7] O. Babelon, C.M. Viallet, *Hamiltonian structures and Lax equations,* Phys. Lett. B **237**, 411 (1989)

[8] A. Ballesteros, A. Enciso, F.J. Herranz, O. Ragnisco, *Superintegrability on N-dimensional curved spaces: Central potentials, centrifugal terms and monopoles*, Ann. Phys. **324**, 1219 (2009)

[9] F. Calogero, *Solution of the one-dimensional N-body problem with quadratic and/or inversely quadratic pair potentials,* J. Math. Phys. **12**, 419 (1971)

[10] F. Calogero, *Exactly solvable one-dimensional many-body problems,* Lett. Nuovo Cim. **13**, 411 (1975)

[11] F. Calogero, *Motion of Poles and Zeros of Special Solutions of Nonlinear and Linear Partial Differential Equations, and Related "Solvable" Many Body Problems,* Nuovo Cimento **43B**, 177 (1978)

[12] F. Calogero, *Classical Many-Body Problems Amenable to Exact Treatments, Springer*, Berlin, (2001)

[13] R. Caseiro, J.P. Francoise, *Algebraic Linearization of hyperbolic Ruijsenaars–Schneider Systems,* J. Nonlin. Math. Phys **8**, 56 (2001)

[14] R. Caseiro, J.P. Francoise, R. Sasaki, *Algebraic linearization of dynamics of Calogero type for any Coxeter group,* J. Math. Phys. **41**, 4679 (2000)

[15] J.F. van Diejen, *Deformations of Calogero–Moser systems and finite Toda chains*, Theor. Math. Phys. **99**, 549 (1994)

[16] P.A.M. Dirac, *Lectures on Quantum Mechanics*, Belfer Graduate School of Science Monographs Series Number 2, 1964

[17] P.G. Drazin, R.S. Johnson, *Solitons: an Introduction*, Cambridge University Press, Cambridge, 1996

[18] P. Etingof, *Calogero-Moser Systems and Representation Theory,* European Mathematical Society, Zürich, 2007

[19] N.W. Evans, *Superintegrability in classical mechanics*, Phys. Rev. A **41**, 5666 (1990)

[20] L. Fehér, V. Ayadi, *Trigonometric Sutherland systems and their Ruijsenaars duals from symplectic reduction,* J. Math. Phys. **51**, 103511 (2010)

[21] L. Fehér, C. Klimčík, *On the duality between the hyperbolic Sutherland and the rational Ruijsenaars–Schneider models*, J. Phys. A **42**, 185202 (2009)

[22] L. Fehér, C. Klimčík, *Poisson–Lie interpretation of trigonometric Ruijsenaars duality*, Commun. Math. Phys. **301**, 55 (2011)

[23] L. Fehér, B.G. Pusztai, *A class of Calogero type reductions of free motion on a simple Lie group*, Lett. Math. Phys. **79**, 263 (2007)

[24] G. Gorni, G. Zampieri, *A class of integrable Hamiltonian systems including scattering of particles on the line with repulsive interactions*, Differential and Integral Equations **4**, 305 (1991)

[25] V. Guillemin, S. Sternberg, *Symplectic Techniques in Physics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1984

[26] M. Hashizume, *Geometric approach to the completely integrable Hamiltonian systems attached to the root systems with signature*, Adv. Stud. Pure Math. **4**, 291 (1984)

[27] S. Helgason, *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces*, Acad. Press, Cambridge, 1978

[28] M. Henneaux, C. Teitelboim, *Quantization of Gauge Systems*, Princeton University Press, Princeton, 1994

[29] C. Itzykson, J-B. Zuber, *Quantum Field Theory*, McGraw-Hill Co., New York, 1985

[30] J.V. José, E.J. Saletan, *Classical Dynamics: A Contemporary Approach*, Cambridge University Press, Cambridge, 1998

[31] E. G. Kalnins, J. Kress, W. Miller, Jr., *Second order superintegrable systems in conformally flat spaces III. Three-dimensional classical structure theory*, J. Math. Phys. **46**, 103507 (2005)

[32] D. Kazhdan, B. Kostant, S. Sternberg, *Hamiltonian group actions and dynamical systems of Calogero type*, Comm. Pure Appl. Math. **XXXI**, 481 (1978)

[33] A.A. Kirillov, *Unitary representations of nilpotent Lie groups*, Russian Math. Surveys **17**, 53 (1962)

[34] B. Kostant, *Orbits, symplectic structures and representation theory*, Proc. of U.S.-Japan Seminar in Differential Geometry, Kyoto, 71, (1966)

[35] J. Marsden, A. Weinstein, *Reduction of symplectic manifolds with symmetry*, Reports on Math. Phys. **5**, 121 (1974)

[36] J. Moser, *Three integrable Hamiltonian systems connected with isospectral deformations*, Adv. Math. **16**, 197 (1975)

[37] M.A. Olshanetsky, A.M. Perelomov, *Completely integrable Hamiltonian systems connected with semisimple Lie algebras*, Invent. Math. **37**, 93 (1976)

[38] M.A. Olshanetsky, V.-B. K. Rogov, *Bound states in completely integrable systems with two types of particles,* Ann. Inst. H. Poincaré **XXIX**, 169 (1978)

[39] J.-P. Ortega, T.S. Ratiu, *Momentum Maps and Hamiltonian Reduction*, Progress in Mathematics **222**, Birkhäuser, Basel, 2004

[40] B.G. Pusztai, *On the scattering theory of the classical hyperbolic C_n Sutherland model*, J. Phys. A **44**, 155306 (2011)

[41] B.G. Pusztai *The hyperbolic BCn Sutherland and the rational BCn Ruijsenaars-Schneider-van Diejen models: Lax matrices and duality,* Nucl. Phys. B **856**, 528 (2012)

[42] S.N.M. Ruijsenaars, *Action-angle maps and scattering theory for some finite-dimensional integrable systems I. The pure soliton case*, Commun. Math. Phys. **115**, 127 (1988)

[43] S.N.M. Ruijsenaars, *Action-angle maps and scattering theory for some finite-dimensional integrable systems II. Solitons, antisolitons and their bound states*, Publ. RIMS **30**, 865 (1994)

[44] S.N.M. Ruijsenaars, *Action-angle maps and scattering theory for some finite-dimensional integrable systems III. Sutherland type systems and their duals*, Publ. RIMS **31**, 247 (1995)

[45] S.N.M. Ruijsenaars, *Systems of Calogero–Moser type*, pp. 251 in: Proceedings of the 1994 CRM-Banff Summer School 'Particles and Fields', Springer, Berlin, 1999

[46] S.N.M. Ruijsenaars, H. Schneider, *A new class of integrable models and their relation to solitons*, Ann. Phys. **170**, 370 (1986)

[47] H. Schlichtkrull, *Harmonic Analysis and Special Functions on Symmetric Spaces*, pp. 91-225 in: G. Heckman and H. Schlichtkrull, Harmonic Analysis and Special Functions on Symmetric Spaces, Perspectives in Mathematics **16**, Academic Press, New York, 1994

[48] A.C. Scott, *Encyclopedia of Nonlinear Science*, Routledge, Taylor and Francis Group, New York, 2005

[49] J.M. Souriau, *Structures des Systèmes Dynamiques*, Dunod, Paris, 1969

[50] B. Sutherland, *Exact results for a quantum many-body problem in one dimension. I*, Phys. Rev. **A4**, 2019 (1971)

[51] B. Sutherland, *Beautiful Models*, World Scientific, Singapore, 2004

[52] P. Tempesta, P. Winternitz *et al* (Editors), *Superintegrability in Classical and Quantum Systems, CRM Proceedings and Lecture Notes*, **37**, Amer. Math. Soc., Providence, 2004

[53] A.V. Tsiganov, *On maximally superintegrable systems*, Regul. Chaotic Dyn. **13**, 178 (2008)

[54] R. Vein, P. Dale, *Determinants and their applications in mathematical physics*, Springer, Berlin, 1998

[55] S. Wojciechowski, *Superintegrability of the Calogero–Moser system*, Phys. Lett. A **95**, 279 (1983)